GÖTEBORGS UNIVERSITET
INST FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

Elevers tillvägagångssätt och uttalade uppfattningar när de hanterar tal i bråkform

En fallstudie där datorn används som metod och verktyg

Eva-Lena Cederman och Marie Utterberg

Examensarbete:	15 hp
Program:	Speciallärarprogrammet, SLP600
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	Vt/2012
Handledare:	Thomas Lingefjärd
Examinator:	Joanna Giota
Rapport nr:	VT12-IPS-07 SLP600

Abstract

Examensarbete: 15 hp
Program: Speciallärarprogrammet, SLP600
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: Vt 2012
Handledare: Thomas Lingefjärd
Examinator: Joanna Giota
Rapport nr: VT12-IPS-07 SLP600
Nyckelord: Matematikdidaktik, elever i svårigheter, tal i bråkform, problemlösning, kommunikation, dynamisk visuell representationsform, datorn som verktyg, GeoGebra, Screencast-O-Matic

---

Syfte: Syftet är att undersöka hur elever i årskurs åtta hanterar tal i bråkform vid problemlösning, med inriktning på del av en helhet och del av antal, när datorn används som verktyg. Fokus är på de elever som visar svårigheter inom detta matematikområde.

Teori: Vi utgår från det sociokulturella perspektivet som innefattar både socialt samspel och redskap som utvecklar vårt tänkande för att ge oss stöd i lärandet. Vårt specialpedagogiska synsätt innebär att elevers svårigheter uppstår i mötet med omgivningen och detta benämns i forskningslitteraturen som det relationella perspektivet.

Metod: För att på djupet kunna studera de forskningsfrågor som studien utgår ifrån används fallstudie som metod. Empirin samlas in genom att eleverna, som arbetar i par, använder ett skärminspelningsprogram Screencast-O-Matic så att vi kan ta del av elevernas samtal och det som sker på deras datorskärmar. Eleverna löser matematikproblem som behandlar tal i bråkform med stöd av en visuell dynamisk representationsform i datorprogrammet GeoGebra. Empirin kategoriseras i följande kategorier: Kunskapande och användning, kontroll samt affekter. Kunskapande och användning delas in i följande underkategorier: metod och beräkning, begrepp samt resonemang och kommunikation. Därefter gör vi en tolkning och analys av den kategoriserade empirin.

Resultat: I denna kvalitativa studie anser vi att det inte går att göra några generaliseringar eftersom det är en liten urvalsgrupp. Det vi tycker oss kunna se är att elever i matematiksvårigheter får stöd i att använda en visuell dynamisk representationsform vid problemlösning. Elever använder representationsformen som stöd i sitt resonemang genom att till exempel titta på figuren, ändra storlek eller rita i figuren för att prova sig fram och samtidigt argumenterar de för olika lösningsmetoder. Vi ser också att några elever använder få begrepp i sin kommunikation, använder fel ingångsvärde och inte uppmärksammar all information i elevuppgiften.

Förord

Vi är två blivande speciallärare som arbetar i grundskolan. Vår grundutbildning är lärarexamen i matematik/NO för årskurs 1-7 respektive 4-9. Efter att i flera år undervisat elever i matematik och mött elever i svårigheter blev vi mer och mer medvetna om komplexiteten i att undervisa i matematik. De elever som av olika anledningar var i behov av särskilda utbildningsinsatser fångade vårt intresse och vi insåg att vi behövde mer kunskaper. Detta ledde till att vi igen sökte oss till universitetet och nu efter tre år skriver vårt examensarbete inom specialpedagogik.

Våren 2011 var vi på flera föreläsningar som handlade om införandet av en-till-en datorer i skolan. Det talades vid dessa tillfällen om att det skulle leda till mycket goda skolresultat för eleverna. Eftersom vi, vid det laget, var vana vid att kritiskt granska och se vad som låg till grund för de påståenden som gjordes blev vi nyfikna när vi inte hittade så mycket bakomliggande forskning. Även Kroksmarks rapport (Kroksmark, 2011) där han granskat resultat från en kommun som infört en-till-en datorer och där han kom fram till att betygen sjunkit efter införande fick oss att fundera till över den snabba processen med datorinköp ute i kommunerna. Frågan vi ställde oss var hur kan datorerna användas i matematikundervisningen och skulle de kunna bidra till ökad måluppfyllelse för elever i matematiksvårigheter? Inom grundskolan i Sverige finns det ingen större tradition av att använda datorn i matematikundervisningen till något annat än möjligtvis färdighetsträning. Från början tänkte vi göra en studie och se vilka goda exempel som finns i Sverige och även i USA med fokus på matematikämnet och elever i svårigheter. Så småningom efter diskussioner ändrade vi inriktning till att själva vilja ta reda på om datorn kan vara ett stöd för elever vid problemlösning med fokus på de elever som är i svårigheter inom vårt valda område, tal i bråkform. För att kunna undersöka hur eleverna löser problem tillsammans har vi använt datorprogrammet GeoGebra för att ge eleverna tillgång till en visuell representationsform som är dynamisk. Skärminspelningsprogrammet Screencast-O-Matic har använts för att kunna ta del av elevernas resonemang och deras sätt att hantera de två problemlösningsuppgifterna. Med denna metod har vi kunnat få unika och autentiska inblickar i elevernas sätt att hantera uppgifterna.

Vi har i huvudsak arbetat tillsammans men har gjort följande uppdelning. Eva-Lena svarar för sociokulturellt perspektiv, problemlösning, kommunikationens betydelse och Marie svarar för specialpedagogiskt perspektiv, fallstudien som forskningsmetod, elever i matematiksvårigheter samt tal i bråkform Vi har gemensamt samlat in empirin och tillsammans skrivit IKT, metod, resultat och diskussion.

Innehållsförteckning

Abstract **1**

Förord **1**

Innehållsförteckning **1**

1. Inledning **3**

2. Syfte **4**
2.1 Frågeställningar 4
2.2 Begreppsdefinition 4

3. Teoretisk inramning **5**
3.1 Sociokulturellt perspektiv 5
3.2 Specialpedagogiskt perspektiv 7

4. Relaterad forskning **8**
4.1 Elever i matematiksvårigheter 8
4.2 Tal i bråkform 10
4.3 Problemlösning 12
4.4 Kommunikationens betydelse för problemlösning 14
4.5 Informations- och kommunikationsteknologi 16

5. Metod **18**
5.1 Val av metod 18
5.1.1 Fallstudien som forskningsmetod 20
5.2 Insamling av empiri 21
5.3 Val av undersökningsgrupp 21
5.4 Genomförande 22
5.4.1 Förberedelser inför studien 22
5.4.2 Förstudier 23
5.4.3 Elevuppgifter 23
5.4.3.1 Elevuppgift 1 24
5.4.3.2 Elevuppgift 2 25
5.4.4 Studie 26
5.5 Studiens begränsningar 28
5.5.1 Bortfall 28
5.5.2 Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet 28
5.5.3 Etiska överväganden 29
5.5.3.1. Informationskravet 30
5.5.3.2 Konfidentialitetskravet 30
5.5.3.3 Samtyckeskravet 30
5.5.3.4 Nyttjandekravet 30

6. Resultat **30**
6.1 Resultatredovisning 30
6.1.1 Elevuppgift 1 31

6.1.1.1 Kunskapande och användning – Metod och beräkning 31
6.1.1.2 Kunskapande och användning - Begrepp.. 35
6.1.1.3 Kunskapande och användning - Resonemang och kommunikation................. 36
6.1.1.4 Analys av uppgift 1 36
6.1.2 Elevuppgift 2..37
6.1.2.1 Kunskapande och användning – Metod och beräkning 37
6.1.2.2 Kunskapande och användning - Begrepp.. 41
6.1.2.3 Kunskapande och användning - Resonemang och kommunikation................. 41
6.1.2.4 Analys av uppgift 2 42
6.1.3 Kontroll – Elevuppgift 1 och 2 43
6.1.4 Affekter – Elevuppgift 1 och 2 43
6.2 Sammanfattande kommentarer och analys..44

7. Diskussion 46
7.1 Metodreflektion 46
7.1.1 Resultatets tillförlitlighet 47
7.1.1.1 Validitet.. 47
7.1.1.2 Reliabilitet 47
7.2 Resultatdiskussion 47
7.2.1 Eleverna hanterar del av 47
7.2.2 Elevernas begreppsuppfattning...48
7.2.3 Elevernas metoder och beräkningar..48
7.2.4 Elevernas kommunikation och resonemang 49
7.2.5 Elevernas användning av datorn som verktyg 50
7.2.6 Specialpedagogiska implikationer 50
7.2.7 Framtida forskning..51

Referenser 52

Bilaga 1...57

Bilaga 3...59

Bilaga 4...61

Bilaga 5...62

Bilaga 6...66

Bilaga 7...68

1. Inledning

Skolan har kommit att hamna i mediernas fokus på ett sätt som aldrig tidigare. En av anledningarna har varit svenska skolelevers sjunkande resultat i nationella undersökningar, där särskilt elevernas matematikkunskaper är i blickpunkten. Skolverket (2004) har gjort en nationell utvärdering av grundskolan, NU 03, som visar på: ”brister i kunskapsmålen i flera ämnen – i synnerhet gäller det förmågan att läsa längre texter i svenska, innehållsliga kunskaper i de samhällsorienterande ämnena, begreppsförståelse i kemi samt försämrade kunskaper i matematik” (s.7). Under det senaste året har mycket förändrats i svensk skola då det har införts ny skollag, ny läroplan och nytt betygssystem. Detta sker samtidigt som samhällsutvecklingen med digital teknik påverkar den pedagogiska situationen och en stor del av diskussionen handlar om hur en-till-en datorer kan integreras i undervisningen.

I den nya läroplanen läggs stor tyngd på de förmågor som eleverna ska utveckla (Skolverket, 2011a).

> Genom undervisning i matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att
>
> - formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder, använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
> - välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
> - föra och följa matematiska resonemang, och
> - använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser (s. 63).

Myndigheten för skolutveckling (2007) lyfter fram att kommunikation som kursplanen har fokus på är en förmåga som inte eleverna utvecklar i matematikundervisningen. ”Arbetssätt och bedömningssätt överensstämmer sällan med de mål i kursplanen som handlar om att kunna kommunicera och resonera om matematik tillsammans, pröva olika lösningar och argumentera med andra” (s. 28). Myndigheten för skolutveckling (2007) och NU 03 visar båda att matematikundervisningen i de senare årskurserna i grundskolan till stor del består av individuellt arbete i läroboken.

> I år 7–9 arbetade eleverna enskilt med uppgifterna i boken och kunskaperna kontrollerades med diagnoser eller prov. Lärarna cirkulerade i klassrummet och gav individuell hjälp. Gemensamma genomgångar, planerat elevsamarbete, laborationer eller samtal kring matematiska problem och lösningsstrategier förekom mer sällan eller aldrig. En omräkning av lektionstiden till tid per elev visade att läraren hann ägna högst två minuter per lektion åt varje elev med detta arbetssätt. (Myndigheten för skolutveckling, 2007, s. 32)

Vår erfarenhet som lärare visar att fram till nu har inte mycket förändrats. Det senaste året ser vi dock en utveckling som kan komma att förändra matematikundervisningen. I flera kommuner runt om i landet införs nu en-till-en projekt i grundskolor. Detta innebär att varje elev får låna en bärbar dator som de ansvarar för och får använda dygnet om. Kroksmark (2011) påpekar att år 2011 kommer 1/3 av kommunerna i Sverige att ha startat ett sådant projekt. Även i vår hemkommun genomförs, med start höstterminen 2011, ett skolutvecklingsprojekt där alla elever i årskurs 7-9 får tillgång till en egen dator. Att ge eleverna tillgång till digitala verktyg är en förutsättning för att uppfylla läroplanens kunskapsmål och syftet i kursplanen för matematik (Skolverket, 2011a) som lyfter fram IKT (informations- och kommunikationsteknologi) som ett verktyg. Även internationellt ses detta som en viktig kunskap då digital kompetens är en av EU:s åtta nyckelkompetenser (Europaparlamentet, 2006). Vi började fundera på hur en-till-en projekt kan påverka matematikundervisningen och elevernas kunskapsutveckling. Eftersom vi i vårt dagliga arbete som speciallärare möter elever i matematiksvårigheter undrar vi hur detta förändrade arbetssätt påverkar dem. Kan datorn som verktyg bidra till att eleverna utvecklar dessa förmågor som tydliggörs i den nya läroplanen?

Skolverket (2011b) menar att digital teknik kan stödja lärandet i matematik genom att stimulera till att visualisera och konkretisera abstrakta fenomen. Vi funderar på hur detta ska kunna genomföras i klassrummet och om datorn kan vara ett särskilt viktigt verktyg för elever i matematiksvårigheter. I denna studie undersöker vi hur elever löser problem när de hanterar tal i bråkform. Vi har valt att ge eleverna öppna uppgifter där problemlösningsförmågan fokuseras och inte aritmetiken för att ge elever i matematiksvårigheter möjlighet att visa fler matematiska förmågor. För att kunna följa elevernas tillvägagångssätt och deras uttalade uppfattningar använder vi ett skärminspelningsprogram. När de arbetar i par bidrar det till att tyngdpunkten på kommunikation förstärks. Eleverna samtalar och argumenterar för olika lösningar och metoder och för på detta sätt diskussionen framåt. Sammantaget medverkar metoden i denna studie till att elevernas problemlösning kan spelas upp och följas som en realistisk och färgstark process där elevernas metod, resonemang och känsloyttringar i detalj kommer fram. Vi ser detta som ett spännande utvecklingsområde att med modern digital teknik se elevers hinder och möjligheter. Särskilt intressant är möjligheten att även lärare kan låta elever använda skärminspelningsprogram i undervisningen för att få ökad kunskap om varje elev. Denna lärdom kan användas för att individualisera undervisningen efter elevers olika förutsättningar och behov samt i den formativa bedömningen för att göra elever delaktiga i sin egen kunskapsutveckling. I förlängningen och med denna nya insikt skulle undervisningen kunna förändras för att stimulera elevers kunskapsutveckling och ge dem större möjlighet att utveckla de förmågor som skrivs fram i den nya läroplanen.

2. Syfte

Syftet är att undersöka hur elever i årskurs 8 hanterar tal i bråkform vid problemlösning, med inriktning på del av en helhet och del av antal, när datorn används som verktyg. Fokus är på de elever som visar svårigheter inom detta matematikområde.

2.1 Frågeställningar

Den frågeställning vi utgår ifrån är: Hur hanterar elever tal i bråkform?
Denna fråga inbegriper behovet av att förstå hur elever

- hanterar del av antal och del av en helhet
- visar begreppsförståelse
- använder matematiska metoder och beräkningar
- resonerar och kommunicerar matematik
- använder en dynamisk visuell representationsform i datorprogrammet GeoGebra

2.2 Begreppsdefinition

Följande definitioner används i denna studie.

Affekter	Lester (1996) inbegriper både attityder och känslor i detta begrepp som omfattar bland annat motivation, självförtroende, förmåga att stå emot svårigheter och frustration över en viss uppgift.
Kommunikation	Skolinspektionen (2009) definierar kommunikation som att ”kunna kommunicera, att utbyta information, om matematiska idéer och tankegångar…” (s. 12).
Problemlösning	Hagland, Hedrén och Taflin (2005) definierar ett problem utifrån tre kriterier som ”något en person vill eller behöver lösa, personen ifråga har inte en på förhand given procedur för att lösa och det krävs en ansträngning av honom eller henne att lösa” (s. 27).
Resonemang	Skolinspektionen (2009) definierar resonemang som att ”kunna motivera val och slutsatser via att argumentera på allmänna logiska och speciella ämnesteoretiska grunder” (s.12).

3. Teoretisk inramning

Forskning handlar, i grova drag om, om att finna goda svar på bra frågor och då behövs erfarenhetsmaterial eller data och en uppsättning forskningsredskap eller metoder (Egerbladh & Tiller, 1998). I detta avsnitt redogör vi för den teoretiska bakgrund och den forskningsmetod som studien vilar i. Fokus är på elever i matematiksvårigheter och studien grundar sig på det sociokulturella perspektivet. Detta perspektiv innefattar både socialt sampel och redskap som utvecklar vårt tänkande och ger oss stöd i vårt lärande (Liberg, 2007; Säljö, 2010). Kunskapsutveckling är sammankopplad med argumentation och handling i sociala kontexter vilket är centralt i denna studie. Vårt specialpedagogiska synsätt innebär att elevers svårigheter uppstår i mötet med kontexten och detta benämns som det relationella perspektivet i forskningslitteraturen. Den metod som används är fallstudien där det ges möjlighet för oss att på djupet kunna studera de forskningsfrågor som studien utgår ifrån.

3.1 Sociokulturellt perspektiv

Det sociokulturella perspektivet har sin grund i Vygotskys teorier kring människan och hennes lärande och utveckling (Säljö 2000, 2010). Vygotsky (1978) definierar ”the zone of proximal development”, närmsta utvecklingszonen på följande sätt: ”It is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in laboration with more capable peers” (s. 86). Denna idé, att elever vid problemlösning kan mer och lär sig tillsammans med andra, stämmer väl överens med det sociokulturella perspektivets syn på utveckling och lärande. Om lärande ska studeras i ett sociokulturellt perspektiv måste tre företeelser uppmärksammas skriver Säljö (2000). Dessa är:

- Utveckling och användning av intellektuella redskap,
- Utveckling och användning av fysiska redskap
- Kommunikation och de olika sätt människor utvecklar former för samarbete i olika kollektiva verksamheter.

Säljö (2000) definierar redskap på följande sätt: ”Med redskap eller verktyg menas de resurser, såväl språkliga (eller intellektuella) som fysiska, som vi har tillgång till och som vi använder när vi förstår vår omvärld och agerar i den" (s. 20). Exempel på intellektuella redskap är språket och olika tankeredskap det vill säga redskap som stöttar tänkandet till exempel en matematisk formel. Människan har alltid strävat efter att underlätta vardagen och uppfunnit olika hjälpmedel såsom kniv, plog, vävstol, som är exempel på fysiska redskap. Säljö menar att kommunikativa processer är av stor vikt. Det är genom kommunikation som individen blir delaktig i kunskaper och färdigheter. Detta gör att kunskap är sammankopplad med argumentation och handling i sociala kontexter. Att kommunicera med andra och därigenom få nya erfarenheter och kunskaper som formar vårt tänkande är en viktig grund i det sociokulturella perspektivet (Säljö 2000, 2010). Språket är vårt viktigaste redskap eftersom språk och tanke påverkar varandra. När man sätter ord på sina tankar utvecklas både tänkandet och språket vilket även Vygotsky lyfter fram. Riesbeck (2011) skriver om språket som verktyg i matematikundervisningen och att det måste utvecklas för fortsatt lärande. Hon menar att eleverna behöver få "lära sig genom att undersöka, samtala och lära sig hantera olika språk, både det vardags-, matematik- och reflektionsspråk som behövs för utveckling av nya tankegångar" (s. 303). En individs sätt att tänka, resonera och lösa problem är alltid beroende av kontexten, den situerade praktiken, och de redskap som används. Den tekniska (och intellektuella) utvecklingen som skett är exempel på verktyg/redskap som har utvecklats under århundraden.

> I ett sociokulturellt perspektiv framstår människan som en redskapsproducerande och redskapsanvändande varelse, som inte bara lever i världen, utan som också omvandlar den för sina syften. Hon utvecklar kunskaper och färdigheter genom att skapa kulturella redskap som ingår i olika verksamheter i samhället och som förändrar våra sätt att kommunicera, att arbeta, att roa oss och därmed vårt sätt att lära. Hon transformerar sin omvärld genom sina kunskaper och färdigheter, och hon transformerar också sig själv genom sitt lärande (Säljö, 2010, s. 225).

Människan lär av andra, tillsammans med andra och använder sig av redskap som innebär att vårt sätt att lära förändras. Dagens teknik har förändrat vårt sätt att lära och ger nya möjligheter till lärande. Riesbeck (2011) tar som exempel programmet GeoGebra där eleverna själva kan konstruera uppgifter och den interaktiva skrivtavlan som ger möjlighet till att variera undervisningen och som främjar kommunikation och därmed en fördjupad förståelse. Säljö (2005) betonar betydelsen av att ju mer vi använder sådana redskap såsom miniräknare och datorer i matematiken "desto viktigare är det att vi förstår de principer som gäller för hur matematiska operationer fungerar och hur man ska tänka när man använder dem. Vår uppmärksamhet måste riktas mot de begreppsliga sammanhang och system inom vilka dessa operationer är meningsfulla" (s. 16-17). Ett annat centralt begrepp inom det sociokulturella perspektivet är mediering. Mediering handlar, enkelt uttryckt, om samspelet mellan människa (subjekt), redskap och kontext (objekt). Hur vi minns och hur vi fysiskt handlar påverkas av de medierande redskap som vi har tillgång till. Säljö (2000) beskriver lärandet som förmågan att se något nytt genom att relatera till något bekant. Denna förmåga utvecklar vi genom att lära oss behärska intellektuella redskap. Språket, som tidigare nämnts, har en otroligt viktig funktion i dagens samhälle likaså att behärska fysiska redskap som finns i vår vardag. Liberg (2007) menar att ett sociokulturellt perspektiv innefattar både den sociala samverkan och olika typer av sociokulturella redskap som utvecklar vårt tänkande och ger oss stöd i vårt lärande. Liberg skriver vidare att olika former av informations- och kommunikationsteknologier är exempel på sociokulturella redskap. Till dessa räknas exempelvis massmedia, datorer, programvaror och internet. Ett utmärkande drag för det sociokulturella perspektivet är att gränsen för vad vi kan åstadkomma både fysiskt och intellektuellt flyttas genom användningen av olika redskap.

3.2 Specialpedagogiskt perspektiv

Persson (2007) definierar specialpedagogik som ett ”kunskapsområde med rötter i den pedagogiska disciplinen med uppgift att stötta pedagogiken då variationen av elevers olikheter medför att den vanliga pedagogiken inte räcker till” (s. 12). Det kommer alltid, menar Persson, att finnas elever som av olika orsaker behöver individuellt anpassad undervisning av lärare med fördjupad specialpedagogisk kompetens. Men det är också viktigt att specialpedagogisk kunskap ingår i arbetslagens och arbetsenheternas arbete och att denna kunskap används så att undervisnings- och lärandemiljön i klasserna får hög kvalitet. Björk-Åkesson (2007) skriver att på senare år bygger specialpedagogiken på ett helhetsperspektiv och en vidare syn betonas. Specialpedagogiken har blivit tvärvetenskaplig och bygger på att flera vetenskapsområden samverkar. ”De komplexa situationer som man ställs inför inom det specialpedagogiska verksamhetsfältet kräver att man kan sätta på sig ”olika glasögon” och utforska omvärlden utifrån olika vetenskapsteoretiska utgångspunkter” (Fischbein 2007, s. 20). Ahlberg (2009) menar att detta är karakteristiskt för det specialpedagogiska kunskapsområdet. Hon betonar möjligheten att byta mellan olika synsätt som vidgar och fördjupar förståelsen av forskningsfältet, vilket främjar den framtida utvecklingen. Idag hämtas även kunskap inom det tekniska kunskapsområdet, skriver Björk-Åkesson. ”Samspelet mellan människan som upplevande och biologisk varelse och den upplevande och materiella omvärlden är således centralt i det specialpedagogiska kunskapsområdet” (Fischbein 2007, s. 23). Hon menar också att syftet med den specialpedagogiska forskningen är att vidga pedagogiken så att den omfattar den totala variationen av barn och elever samt miljön i skolan och samspelet mellan barn och miljö. I specialpedagogiken blir extremvariationen central då pedagogiken fokuserar på genomsnittsvariationen. Björk-Åkesson beskriver det som att specialpedagogiken kan ses med ett systemteoretiskt synsätt, där multi-dimensionaliteten betonas. Hon menar med detta att tonvikten läggs på den ständigt pågående ömsesidiga påverkan mellan individer i olika kontexter. Specialpedagogiken omfattar idag frågeställningar som handlar om att skapa optimala förutsättningar för lärande. Begrepp som integrering, segregering, normalitet och avvikelse har blivit centrala. ”Samtidigt som skolan skall vara likvärdig och målen lika för alla skall den vara öppen för och stödja mångfald och variation” (Persson, 2007, s. 164). En problematik uppstår när skolan ska ge en likvärdig utbildning som anpassas till individuella olikheter och förutsättningar, påpekar Persson, som menar att specialpedagogiken har tagit på sig uppgiften att bygga en bro mellan samhällets intentioner och praktikens möjligheter. I läroplan för grundskola (Skolverket, 2011a) betonas att:

> Hänsyn ska tas till elevernas olika förutsättningar och behov. Det finns också olika vägar att nå målet. Skolan har ett särskilt ansvar för de elever som av olika anledningar har svårigheter att nå målen för utbildningen. Därför kan undervisningen aldrig utformas lika för alla (s. 8).

Ahlberg (2001) påpekar att i skolans vardagsarbete dominerar det individinriktade perspektivet för arbetet med barn i behov av särskilt stöd. Elevens prestation står i centrum och specialundervisningens uppgift är att kompensera elevers tillkortakommanden och skapa möjligheter för eleven att nå upp till skolans krav. Haug (1998) kallar detta för en kompensatorisk lösning där elever diagnostiseras för att hitta de svaga sidorna och kompenseras för dessa genom tillrättalagd undervisning och extra resurser för att lyfta eleven till den nivå där andra elever befinner sig. Haug stöder det som han kallar det demokratiska deltagarperspektivet, där skolan har sin grund i ömsesidig respekt för individers olika behov och där alla kan bidra till det gemensamma men efter olika förmåga. Detta kräver att alla är tillsammans i konfrontation och samverkan, vilket kräver en inkluderande skola. Persson (2007) menar att specialpedagogisk verksamhet bör ses relationellt, det vill säga i samspel med övrig pedagogisk verksamhet i skolan. Detta innebär att elevers förutsättningar också bör ses relationellt där förändringar i elevens omgivning påverkar förutsättningarna för elevens lärande. Persson beskriver att i detta perspektiv innebär pedagogisk kompetens att anpassa undervisningen till olika förutsättningar för elevers lärande samt att elevers svårigheter uppstår i mötet med olika händelser i uppväxt- och utbildningsmiljön. Nilholm (2006) påpekar att det har funnits en vision om skolan, vilket har uttryckts med begreppet ”en skola för alla”, där skolan ska finnas för alla elever där de har rätt till delaktighet i gemensamma aktiviteter. Men även om de flesta barn i Sverige är inskrivna i grundskolan så belyser Nilholm att det inte behöver betyda att de är inkluderade, eftersom inkludering i första hand inte handlar om en fysisk placering. Även Ahlberg stöder detta synsätt och menar att i en inkluderande skola ses den specialpedagogiska uppgiften som en gemensam angelägenhet för hela skolans verksamhet. En inkluderande undervisning blir central och det är skolan och inte eleverna som ska anpassas och förändras. Haug framhåller att i en inkluderande verksamhet finns det en acceptans för elevers olikheter och dessa blir en daglig erfarenhet som hanteras genom ”individuellt tillrättalagd undervisning för alla barn i samma skola och i samma klassrum” (s. 24). Booth (1998) beskriver det som:

> If we are dealing with complexity, we (as practitioners and researchers) must accept that change, mutability and non-predictability are natural parts of dynamic systems and that ”certainty” is only provided by an artificial view of the world. A theory of special education must provide practitioners with the confidence to accept that uncertainty (s. 78).

4. Relaterad forskning

I detta avsnitt redogörs för vilket uppdrag skolan har, vilka faktorer som påverkar elevernas förmåga samt hur vi kan stödja och hjälpa eleverna till att bli goda problemlösare. De områden vi belyser är elever i matematiksvårigheter, tal i bråkform, problemlösning, kommunikation samt IKT.

4.1 Elever i matematiksvårigheter

Ernest (2011) menar att matematiken är integrerad i vår kultur. Den tekniska utvecklingen som påverkar oss och gör oss beroende av den gör att matematiken får en allt större betydelse i våra liv. Denna utveckling i kombination med att elever är i matematiksvårigheter gör att elever med särskilda utbildningsbehov i matematik blir en viktig fråga. Matematiklärare har ett ansvar för att ge utbildning till alla elever däribland lågpresterande elever, elever med långsam inlärning och de med andra särskilda utbildningsbehov i matematik. Matematikundervisningen för dessa elever kräver speciella överväganden. Ernest belyser att funderingar om vad som är specialundervisning och ”vanlig” undervisning har hamnat i blickpunkten och frågan om vad som menas med begreppet elever i behov av särskilt stöd har blivit aktuell. För elever som upplever svårigheter förväntas nu skolorna att identifiera dessa svårigheter och dokumentera hur dessa behov ska mötas.

Forskare (Engström, 2003; Lunde, 2003; Magne, 1998 m.fl.) framhåller att matematiksvårigheter är ett sammansatt fenomen. Svårigheter att lära sig matematik består av en stor mångfald av barriärer som hindrat eller stört lärprocessen och att matematiksvårigheter därför bör betraktas som ett multifaktoriellt problem. Lunde (2003) menar att det är fyra teorier som brukar användas för att förklara orsaken till elevers svårigheter i matematik. Den första teorin är den medicinska/neurologiska där det fokuseras på elevens kognitiva funktioner. I den andra psykologiska teorin söks förklaringen till elevens svårigheter i låg motivation, koncentrationssvårigheter eller känslomässiga aspekter sammanlänkade med matematikämnet. Den tredje teorin tar sin utgångspunkt i sociala faktorer där socio-ekonomiska villkor påverkar elevens förutsättningar. I den fjärde didaktiska teorin betonas undervisningens betydelse där matematiksvårigheter uppkommer på grund av olämpliga undervisningsmetoder.

Lunde (2003) menar att det är viktigt att skilja på tre olika sorters matematiksvårigheter. Ett är svårigheter som uppstår i matematikämnet, det vill säga i matematikens natur. Det andra är svårigheter som följer av att elevens inlärningsstil inte stämmer överens med undervisningens utformning. Den tredje uppkommer av att nya moment i matematikundervisningen inte kopplas samman med elevens tidigare kunskaper. Med dessa olika svårigheter i beaktande kan det specialpedagogiska arbetet med elever i svårigheter vara förebyggande. Det är därför viktigt att dessa elever får olika former av anpassad undervisning. Detta menar också Ernest (2011) som påpekar att ”there are a whole host of different Special Educational Needs in mathematics because all learners are different and consequently their needs may be different” (s. 6).

Gersten och Clarke (2007b) beskriver följande orsaker till att elever är i svårigheter där dessa uppstår i matematikämnet:

- Inhämtning av aritmetiska fakta
  Ett grundläggande problem för elever i matematiksvårigheter är att de ej automatiserat tabellerna. Detta gör det svårt för eleverna att följa logiska resonemang när en matematisk uppgift behöver lösas i flera steg.
- Impulsivitet
  Ett stort problem är elevers bristande förmåga att utestänga irrelevant information eller deras impulsivitet. Detta kan förklara varför strukturerade metoder som stöder eleverna att rita figurer och tänka högt hjälper dem.
- Andra problem
  Svårigheter med mental representation av matematiska begrepp.
  Lågt utvecklad förmåga att se innebörden av matematiska symboler.
- Svagt arbetsminne.
  Elever med ett svagt arbetsminne får ofta svårigheter med att utföra problem som kräver flera steg.

Karakteristiskt för elever i matematiksvårigheter är att de endast har tillgång till ett fåtal strategier (Ahlberg, 2001; Lunde, 2003). Detta gör att de inte kan anpassa sitt tänkande till de krav som ställs i situationen när de ska välja strategi och detta medför svårigheter med strukturen för hur uppgifter ska lösas. Matematiksvårigheter består av flera faktorer som uppstår i samspelet mellan elevens inlärningsförutsättningar och matematikens innehåll och undervisningsform. Elevers svårigheter består därför av mer än enbart beräkningsfärdigheter och numerisk förmåga (Magne, 1998; Ahlberg, 2001). Hur undervisningen utformas kan enligt Lunde (2003) vara avgörande för om elever kommer att befinna sig i matematiksvårigheter. Ahlberg menar att ledorden i arbetet med elever i behov av särskilt stöd är att minska avståndet mellan krav och förutsättningar. Detta innebär att det är särskilt viktigt att dessa elever får möta olika aspekter av matematiken och använda flera uttrycksmedel, så att alla deras förmågor och möjligheter tas tillvara. För att ge elever ökad tilltro till sin förmåga och lust att lära ska de möta matematik på flera olika sätt, där de får resonera och samtala om matematiska problem utan krav på att svara rätt. Ahlberg betonar att vid övergångar från ett vardagligt tänkande till det abstrakta matematiska språket måste elever i matematiksvårigheter få särskild uppmärksamhet. Flera forskare (Ahlberg, 2001; Lunde, 2003 m.fl.) menar att i skolan betraktas ofta matematiksvårigheter som ett ”mängdproblem”. Det verkar vara en utbredd uppfattning att om bara elever tränar länge nog på en färdighet så kommer förståelsen efter hand. Elever som hamnat i svårigheter har emellertid inte främst behov av att träna mer på samma sak, utan att lära på ett annat sätt – där processen och inte svaret står i fokus. Sherman, Richardson & Yard (2008, s. vii) skriver:

> When teachers and parents focus on how their students learn best, rather than repeatedly offering the same or very similar instructional methods and materials, progress can be made. Students can move from believing they can't do mathematics to real achievment and confidence because instruction is targeted and effective.

Gersten & Clarke (2007a) påpekar att för lågpresterande elever tycks användningen av kamratrespons, tillsammans med strukturerad och tydlig undervisning och formativa uppgifter, vara viktigt. För elever i behov av stöd är tydlig och strukturerad undervisning som möjliggör för eleverna att använda flera visuella representationsformer avgörande. För dessa elever är det i många situationer ofta fördelaktigt att de uppmuntras att tänka högt medan de arbetar till exempel genom att dela sina tankar med en kamrat. ”The process of encouraging students to verbalize their thinking-by talking, writing, or drawing the steps they used in solving a problem-was consitently effective” (s. 2). Eleverna behöver se och utforska matematiska problem med flera olika visuella representationsformer. Dessa metoder verkar också fungera för att minska risken för de elever som alltför snabbt och impulsivt försöker lösa matematiska problem utan att ägna tillräcklig uppmärksamhet åt att tänka på vilka matematiska begrepp och strategier som krävs.

Matematikundervisningen bör innehålla nivåer/faser där elever ges möjlighet att deras kunskaper utvecklas från konkret till abstrakt förståelse och detta är särskilt viktigt för elever i matematiksvårigheter (Malmer, 2002; McIntosh, 2009; Lundberg & Sterner, 2009). Kilborn och Löwing (2002) menar att när elever har problem inom ett område i matematikämnet är en vanlig orsak att läraren inte varit konkret nog när ämnesområdet introducerats eller att inte en konkret presentation knutits samman med en för eleverna lämplig tankeform. Lundberg & Sterner beskriver fyra faser som den didaktiska planeringen bör utgå ifrån. Den laborativa fasen innebär att elever arbeta muntligt i kombination med konkret material och ges möjlighet till erfarenheter som kan bidra till att matematiska begrepp blir begripliga. I den representativa fasen gör eleven representationer av matematiska begrepp eller lösningar för att utvidga sin konkreta förståelse och för att lära sig detta som en strategi som kan användas vid problemlösning. I den abstrakta fasen har eleverna gått från det konkreta till det mer abstrakta där de fördjupar och utvecklar sin förståelse. I återkopplingsfasen befäster eleven sina kunskaper och ser samband med andra begrepp.

4.2 Tal i bråkform

I läroplanen (Skolverket, 2011a) står att ett centralt innehåll i matematikundervisningen ska vara:

- reella tal och deras egenskaper samt deras användning i vardagliga och matematiska situationer.
- talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal.
- centrala metoder för beräkningar med tal i bråkform (s. 65-66).

Nunes, Bryant, Hurry & Pretzlik (2006) framhåller att tal i bråkform är svårt men avgörande för att lära matematik och att elever ofta har svårigheter med begreppsförståelse av tal i bråkform. Denna utmaning måste konfronteras av skolorna eftersom tal i bråkform är en viktig kunskap i vardagsliv, arbete och för fortsatta studier. Enligt forskare (Löwing, 2008; McIntosh, 2009) är tal i bråkform viktiga för att förstå och kunna uttrycka storleken av olika andelar och de är därmed också grundläggande för att förstå både tal i decimalform och procentbegreppet. Baskunskaper om tal i bråkform och bråkräkning är också en förutsättning för att lära sig algebra. McIntosh (2009) beskriver övergången från de hela talen till tal i bråkform som en kritisk punkt för de flesta elever. Ahlberg (2001) menar att för många elever innebär tal i bråkform det största steget från vardagstänkande till ett mer formellt tänkande och liknande synpunkter har Sherman, Richardson & Yard (2009, s.136) som skriver att:

> rational numbers are sometimes quite difficult for students who where successful with whole numbers in early grades. Understanding and becoming proficient in learning about numbers that represent parts, that have an infinite number of names, and that do not follow whole numbers patterns can be daunting.

Elever har enligt McIntosh (2009) traditionellt inte fått tillräckligt med tid och möjlighet för att utveckla en förståelse för tal i bråkform, utan tiden har istället lagts på att de ska lära sig regler för de fyra räknesätten. Eleverna bör få utveckla en god taluppfattning om bråk och inte endast utföra beräkningar med tal i bråkform där innebörden av dessa är oklar för eleverna. Löwing (2008, s. 40) påpekar att:

> En förutsättning för att barn ska kunna operera med tal, alltså kunna räkna, är att de behärskar talen och dess egenskaper på ett sådant sätt att operationerna kan ske med flyt /.../ Taluppfattning handlar alltså om att ha en sådan känsla för hur talen är uppbyggda att man direkt, utan att reflektera över detta kan operera med talen.

Innan eleverna börjar operera med bråk bör de behärska ett antal grundläggande begrepp (Löwing, 2008; McIntosh, 2009). Dessa förkunskaper är att:

- alla delar måste vara lika stora för att de ska vara bråkdelar
- täljaren visar hur många delar av helheten vi har
- nämnaren visar i hur många delar en del har delats
- två olika bråkuttryck kan representera samma tal och kan skrivas på oändligt många sätt.

McIntosh (2009) menar att när elever lär sig tal i bråkform som ett nytt talområde med en ny sorts tal, innebär det att tal behöver uttryckas med hjälp av beteckningar för två tal, det antal delar som helheten är uppdelad i och antalet sådana delar. Detta innebär även att eleven också måste kunna hålla kvar relationen mellan båda talen samtidigt. När elever utvecklar förståelse för tal i bråkform är detta en process där kunskapen gradvis breddas och fördjupas. Sherman m.fl. (2009) belyser fem orsaker till varför elever har svårigheter med att förstå tal i bråkform.

- Eleverna får ofta fokusera på procedurräkning och att lära sig räkneregler i stället för att utveckla begreppsmässig förståelse.
- Det uppstår svårigheter när elever blandar ihop räknemetoder för hela tal och tal i bråkform.
- Ett tal kan representeras av flera olika bråkuttryck vilket ökar risken för att eleven gör fel. Att skatta ett bråktals värde kan vara en större utmaning än för hela tal.
- Tal i bråkform saknar anknytning till vardagen och upplevs som allt för abstrakta.
- Tal i bråkform kan skrivas på flera olika sätt och detta kan vara förvirrande.

Löwing (2008) påpekar hur elever för att kunna tillämpa sina kunskaper i bråkräkning bör vara förtrogna med de problemsituationer där bråkräkning används som en matematisk modell. Här ingår bråk som ett tal eller som delar av en hel men också del av antal och hur bråk används för att beskriva proportion, andel och förhållande. För att förstå tal i bråkform är det viktigt att skapa en begreppsmässig förståelse som grund för att kunna behärska de proceduriella kunskaperna. Sherman m.fl. (2009, s. 164) beskriver det så här:

> Concrete, hands-on-materials and drawings, to which symbols can be connected in the same lesson, are critical components for lessons in which students achieve both fractional number sense and then computational fluency. Direct connections between materials and numerals and between mathematical examples and real-life situations are keys to recognizing patterns and performing successful computations.

Sherman m.fl. menar vidare att tal i bråkform bör i undervisningssituationen ske i kombination med konkret material, illustrationer och autentiska exempel där även elevdiskussioner bör stimuleras. För elever i matematiksvårigheter är det särskilt viktigt, menar Ahlberg (2001), att det är balans mellan variation och struktur samt hur inriktningen ska vara mellan proceduriella respektive begreppsliga kunskaper. För att dessa elever ska kunna använda tekniker och procedurer i olika sammanhang är det viktigt att de inte enbart lär sig olika tekniker då dessa ofta glöms bort om eleven inte har förståelsen. För att utveckla förståelse måste eleverna få tillfälle att använda olika uttryckssätt, samtala och reflektera över egna och andras problem.

Bentley (2011) menar att begreppsmodeller är förenklingar av matematiska begrepp och används för att göra begreppen mer tillgängliga för eleverna. Dessa modeller har olika kvalitet och för att bedöma denna mäts hur väl modellen överensstämmer med det matematiska begreppet, hur modellen tar hänsyn till elevernas tidigare erfarenheter, modellens enkelhet och modellens användbarhet vid problemlösning. Bentley beskriver hur tal i bråkform ofta illustreras med flera olika modeller som till exempel pizzamodellen, kvadratmodellen, chokladkakemodellen, andelsmodellen, tallinjen och operatormodellen. Bentley påpekar att pizzamodellen och kvadratmodellen har högst kvalitet. ”Om flera begreppsmodeller används för ett och samma begrepp kan eleverna ha svårigheter att hålla isär modellernas egenskaper, vilket kan försvåra deras förståelse av begreppet. Mycket talar för att en modell ska användas konsekvent” (s. 107). Ahlberg (2001) menar dock att för att utveckla förståelse hos eleverna bör inte tillit sättas till traditionella uppgifter, som ofta handlar om tårtbitar och pizza där eleverna inte ges möjlighet att själva formulera problem av olika svårighet.

4.3 Problemlösning

”Skolan ska stimulera elevernas kreativitet, nyfikenhet och självförtroende samt vilja till att pröva egna idéer och lösa problem” (Skolverket, 2011a, s. 9). Problemlösning är, och har varit, ett centralt område i våra styrdokument. I och med Lgr 80 lyfts problemlösning fram som ett huvudmoment i matematikundervisningen (Löwing & Kilborn, 2002). Lgr 80 betonar, anser de, att problemlösning ska ses som ett verktyg för att kunna lösa de matematiska problem som man möter i hem och samhälle. I kursplanen i matematik (Skolverket, 2011a) står följande om problemlösning i ämnets syfte:

> Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden.
> …
> Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och ma-

tematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.
…
Vidare ska eleverna genom undervisningen ges möjligheter att utveckla kunskaper i att använda digital teknik för att kunna undersöka problemställningar, göra beräkningar och för att presentera och tolka data (s. 62).

Förmågan att kunna lösa problem är central i Lgr 11 och lyfts fram i syftet och är också det område och står först under kunskapskrav i årskurs 3, 6 och 9 (2011a). Vid problemlösning behöver många olika delar i matematiken användas såsom metoder och uttrycksformer, begrepp, resonemang, värdering och reflektion (2011b). Kraven på elevernas problemlösningsförmåga ökar med stigande ålder och klart är att detta är ett prioriterat område i våra styrdokument. Skolan har i uppdrag att utveckla elevernas problemlösningsförmåga och därmed att förbereda dem så att de kan lösa de matematiska problem som de möter i livet. ”Genom att lösa problem kan man utveckla tankar, idéer, självförtroende, analysförmåga, kreativitet och tålamod. Man lär sig att planera, upptäcka samband, förfina det logiska tänkandet och skaffar sig beredskap att klara situationer i livet” (Nämnaren Tema, 1996, s. 69). Elevernas olika förutsättningar och förkunskaper såsom språklig och matematisk förmåga, uppfattningar om matematik och affektiva faktorer, och att problemlösning i sig är komplext innebär en utmaning för läraren i undervisningssituationen (Björkqvist, 2001; Lester, 1996; Löwing & Kilborn, 2002; Magne, 1998, m.fl.). Lester (1996) har funnit fyra grundläggande principer för undervisning i problemlösning:

- Elever måste lösa många problem för att förbättra sin problemlösningsförmåga.
- Problemlösningsförmåga utvecklas långsamt under en lång tid.
- Elever måste tro på att deras lärare tycker att problemlösning är betydelsefullt för att de ska ta till sig undervisning.
- De flesta elever tjänar på systematisk undervisning i problemlösning (s. 87).

Dessutom poängterar han lärarens viktiga roll, att undervisa, handleda, utmana och stötta där det behövs. Lester beskriver hur läraren kan hjälpa eleverna att utveckla sin problemlösningsförmåga både före, under deras arbete med problemet och hur uppföljningen kan ske. En aktiv lärare är nödvändig vid problemlösning, detta speciellt för de elever som har svårt för att lösa problem. Att lära sig lösa problem tar tid och är mer än att bara kunna räkna tal i en matematikbok. Lester (1996, s. 85-87) skriver att elevers problemlösningsförmåga verkar bero på fem olika kategorier som är beroende av varandra. De beskrivs kortfattat nedan:

- *Kunskapande och användning.* I denna kategori återfinns både formell och informell kunskap såsom fakta och definitioner, algoritmer, strategier och kännedom om problemtyper.
- *Kontroll.* Hur man planerar, utvärderar och styr sitt tänkande, att eleven kan kontrollera sina handlingar.
- *Uppfattningar om matematik.* Det handlar om den subjektiva kunskapen om sig själv, om matematik, omgivningen och de moment som behandlas.
- *Affekter.* Lester skiljer på attityd och känslor. I attityd inbegrips bland annat motivation, självförtroende, förmåga att stå emot svårigheter och att inte ge upp. Känslor kan till exempel vara frustration över en viss uppgift eller att eleven avskyr procent.
- *Socio-kulturellt sammanhang.* Vilket sammanhang en elev växer upp i, både socialt och kulturellt påverkar eleven.

Dessa kategorier samverkar med och påverkar varandra och därmed elevens förutsättningar för att kunna tillgodogöra sig undervisningen. Som lärare är det viktigt att man är medveten om att alla elever har olika erfarenheter och kunskaper med sig och att det är viktigt att se till varje individ för att kunna stödja dess utveckling till en god problemlösare. Det som är ett problem för en elev inte behöver inte vara det för en annan elev (Skolverket, 2011b; Hagland m.fl., 2005; Björkqvist, 2001). Detta medför att valet av problem som eleverna ska arbeta med är centralt. Lester (1996) talar om ”processproblem” det vill säga problem som inte enbart kan lösas genom beräkningar medan Hagland, Hedrén och Taflin talar om så kallade ”rika matematiska problem”. Ett rikt problem kan användas och lösas på olika kunskapsnivåer vilket innebär att alla elever i en klass kan arbeta med samma problem fast utifrån sina egna förkunskaper. En som tidigt intresserade sig för problemlösning var Polya som beskriver fyra faser för elevers arbete med problemlösning: förstå problemet, göra upp en plan, genomföra planen och se tillbaka och kontrollera resultatet (Hagland m.fl., 2005; Magne, 1998).

För att kunna lösa problem krävs att eleverna har de redskap som behövs poängterar Ahlberg (2001). För att hjälpa eleverna att utveckla en god problemlösningsförmåga behövs en systematisk undervisning i hur de ska lösa problem och vilka olika strategier de kan använda (Hagland m.fl., 2005; Ahlberg, 2001; Magne, 1998: Lester, 1996; Malmer, 1990 m.fl.). Att eleverna måste förstå texten och därmed problemet är primärt för att kunna finna en lösning. Magne (1998) lyfter fram att eleverna behöver ha en allmän språklig grund för att kunna analysera problem. När eleverna förstått problemet ska de välja lämplig lösningsstrategi. De behöver då ha tillgång till en mängd lösningsstrategier så att de kan avgöra vilken som är mest lämpad eller för att kunna pröva flera olika. Ofta har eleverna bara fått undervisning om beräkningsstrategin hävdar Lester (1996) och detta menar han är ett skäl till att många har svårt för att lösa problem. Exempel på lösningsstrategier är enligt honom: rita en bild, gör en lista, gissa och pröva, arbeta baklänges och skriv upp en ekvation. Den tredje fasen är att genomföra vald strategi och utföra den eventuella beräkningen. Eleverna behöver då kunna utföra de numeriska beräkningar som behövs. Den fas som eleverna ofta hoppar över är den fjärde fasen som kanske är den viktigaste, att reflektera över om det som man kommit fram till är rimligt och om problemet kunde ha lösts på något annat sätt. Även Löwing och Kilborn (2002) trycker på att det är inte bara är viktigt att förstå ett problem utan också räkna ut korrekt svar och en praktiskt fungerande lösning. Ahlberg (2001) menar däremot att eleverna ska ges tilltro till sin förmåga och att kravet på rätt svar är inte är det viktigaste vid elevernas samtal och resonemang. Elever som har svårigheter lägger ofta inte ner tid på den första och andra fasen – att förstå problemet och välja lösningsstrategi utan går snabbt vidare till den tredje fasen (Ahlberg, 2001). Detta till skillnad mot elever som är goda problemlösare som fokuserar på de två första faserna. Dessutom är samarbete och kommunikation viktiga delar för att kunna bli en god problemlösare.

4.4 Kommunikationens betydelse för problemlösning

”Kommunikation är ett ord som kommer från latinets *communicare*, att ”skapa gemensam förståelse”. Att kommunicera innebär alltså att i samspel med andra skapa och utbyta innebörder – att *sam*tala” (Wistedt, 2001, s. 220). Matematik är ett kommunikativt ämne där samspel och diskussion är viktigt för att eleverna ska utveckla sitt lärande. Detta synsätt ställer sig flera forskare bakom, såsom Mouwitz, Emanuelsson och Johansson (2003), Malmer (2002), Ahlberg (2001) och Magne (1998). I kursplanen i matematik finns fem förmågor angivna varav två handlar om vilka kommunikativa förmågor som eleverna ska ges förutsättningar för att utveckla. Dessa förmågor är att: föra och följa matematiska resonemang samt att använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser (Skolverket, 2011a). Att lära eleverna att kommunicera matematik är ett av matematikundervisningens största uppdrag.

> Att kommunicera innebär i sammanhanget att utbyta information med andra om matematiska idéer och tankegångar, muntligt, skriftligt och med hjälp av olika uttrycksformer. I undervisningen får eleverna möjlighet att utveckla ett alltmer precist matematiskt språk, för att därigenom kunna anpassa sina samtal och redogörelser till olika mottagare eller ändamål. Först när eleverna har utvecklat förmågan att kommunicera matematik kan matematiken utvecklas till ett funktionellt verktyg i olika sammanhang. Lika viktigt som att själv kunna kommunicera matematik är det att kunna lyssna till och ta del av andras beskrivningar, förklaringar och argument. Undervisningen syftar därför även till att eleverna ska kunna tillägna sig och förstå det matematiska innehållet i situationer där matematiska begrepp och uttrycksformer används. (Skolverket, 2011b, s. 11).

Mouwitz m.fl. (2003) betonar vikten av att eleverna får träna på matematisk problemlösning, vilket innebär att de övar på att strukturera sina tankegångar och får tillfälle till att argumentera för sina lösningar.

> Dessa kommunikativa färdigheter har ett värde långt utöver matematikkunnandet som sådant. Den ökade tilltron till den egna förmågan hos en elev som på detta sätt bearbetat, diskuterat och löst matematiska problem leder också till att eleven kommer att känna sig mer motiverad och kapabel att ta itu med andra problemställningar i vidare mening inom skola, samhälle och yrkesliv (s.11).

De menar också att matematikdidaktisk forskning visar att en undervisning som bygger på förståelse, engagemang, helhetssyn och argumentation ger goda resultat. Matematik är ett kommunikationsämne där språket har stor betydelse för lärandet (Riesbeck, 2012; Ahlberg, 2001; Säljö, 2000, 2010; Magne, 1998; Malmer, 1990; Vygotsky, 1978 m.fl.). Vid arbete med problemlösning måste eleven inte bara behärska den matematik som krävs för att kunna lösa uppgiften, eleven behöver också kunna förstå och tolka texten. Magne (1998) skriver: ”Om barnet verkligen skall finna ett budskap i texten, måste orden på pappret associeras med tankeföreställningar som utvecklats ur vardagens och skoldagens talspråk” (s. 159). Han menar att det är flera områden i elevernas språkliga förmåga som samspelar och som de behöver mer eller mindre stöd med att utveckla. Eleverna behöver ha en stabil språklig grund att stå på för att kunna analysera matematikstoffets ofta abstrakta läsinnehåll. I denna grund ingår, enligt Magne, språklig medvetenhet, vardagsföreställningar, ordförråd, språkförståelse, benämningsförmåga, syntax/morfologi och läsuppfattning. Han betonar dessutom att dålig läsfärdighet samt en bristande språklig-logisk analysförmåga ofta är orsaker till fel som eleverna gör vid problemlösning. Riesbeck (2011) lyfter fram tre olika språk som finns i klassrummet och som kan utveckla elevernas lärande. Det är vardagsspråket som används då eleverna arbetar med konkret material, matematikspråket som innehåller begrepp som är specifika för matematiken och det reflekterande språket som används för kritisk granskning och argumentation. Löwing (2006) poängterar vikten av att utveckla elevernas språk genom att använda ett matematiskt språk och inte fastna i vardagsspråket då det kan hindra eleverna från att kunna kommunicera och hantera den formella matematiken. ”Att kommunicera kring sina upptäckter och språkligt beskriva sina erfarenheter är en förutsättning för att kunna hantera dessa symboliskt. /.../ eleverna ska ges tillfälle att kommunicera och samtala med varandra. De kan använda sitt eget språk och sina informella kunskaper när de diskuterar kamraters sätt att förstå olika matematiska uppgifter och problem” (Ahlberg, 2001, s. 122).

Att låta elever arbeta i par eller i grupp är ett arbetssätt som gynnar och därmed utvecklar elevers förmåga till problemlösning (Löwing, 2008; Hagland m.fl., 2005; Ahlberg, 2001; Malmer, 1999; Lester, 1996 m.fl.). Malmer menar att det beror på att eleverna, i det reflekterande samtalet som sker i gruppen/paret, får tillgång till fler idéer. Eleverna utmanas i sina tankegångar då de möter andra sätt att tänka och upptäcker att det finns olika sätt att lösa ett problem. I samtalet kan förståelsen förändras och utvecklas (Ahlberg). Detta att få kommunicera sina egna tankar och argumentera för dem och samtidigt konfronteras med andras idéer ger möjlighet till lärande. Ett sätt för eleverna att få syn på sin egen kunskap är, menar Mouwitz m.fl. (2003), att kommunicera den, genom att diskutera och förklara för andra. Detta understryks även av Magne (1998) som uttrycker att: ”Språket har en stödfunktion för tänkandet och lärandet, eftersom språket är det viktigaste kommunikationsmedlet” (s. 160). När elever löser problem tillsammans utvecklas också elevernas begreppsuppfattning samt att de får tillgång till fler lösningsstrategier. Löwing menar att goda problemlösare behärskar flera olika metoder. Gruppsammansättningen har betydelse framförallt för elever i svårigheter, skillnad i kunskaper och inlärningsförmåga, status och en ofta mer passiv roll är faktorer som läraren behöver vara medveten om menar Olsson, Emanuelsson & Persson (1995).

Läraren är en viktig faktor för att elever ska kunna utvecklas till goda problemlösare (Hagland m.fl., 2005; Löwing & Kilborn, 2002; Ahlberg, 2001; Lester, 1996; Wistedt, 1996 m.fl.). Lester (1996) betonar lärarens aktiva roll i klassrummet både före, under och efter elevernas arbete med problemlösning. Han har sammanställt en tabell med läraraktiviteter där fokus ligger på lärarens kommunikativa roll vid problemlösning (s. 90). En annan syn på detta framförs i Nämnaren Tema (1995) som menar att läraren ofta stör mer än hjälper genom att eleverna lyssnar på läraren och slutar tänka själva. Att tro, som lärare, att om eleverna bara ges tillfälle till grupparbete och därmed samtal och argumentation så utvecklas de till goda problemlösare är att överskatta kommunikationens roll menar Wistedt (1996). Detta gäller framförallt de elever som är i svårigheter som kan ha svårt att sätta sig in i andra sätt att tänka och därmed att utveckla sin egen förmåga. Hon framhåller lärarens roll som hon menar underskattas, läraren har en stor och viktig roll för att hjälpa eleven att tydliggöra sina tankar och att uttrycka dem vilket även Hagland m.fl. (2005) lyfter fram.

4.5 Informations- och kommunikationsteknologi

IKT är ett begrepp som, enligt Skolverket (2011d), innehåller någon form av tillämpning av elektronisk teknik där kommunikation eller kunskap är centralt. De verktyg som nu införs i allt större utsträckning som till exempel datorer och interaktiva skrivtavlor påverkar den pedagogiska situationen i klassrummet där IKT-verktygen kan användas på en mängd olika sätt. Det argument som belyses mest för att introducera IKT i skolan är ”att underlätta elevers lärande och måluppfyllelse i skolan samt lärarens arbete mot dessa mål” (Skolverket 2011d, s. 17).

I läroplanen (Skolverket, 2011a) står att:

- skolan ska ansvara för att varje elev kan använda modern teknik som ett verktyg för kunskapssökande, kommunikation, skapande och lärande (s. 14).

- eleverna ska genom undervisningen ges möjligheter att utveckla kunskaper i att använda digital teknik för att kunna undersöka problemställningar, göra beräkningar och för att presentera och tolka data (s. 62).

Buffington och Silvernail (2009) har i en studie om bärbara datorer i matematikundervisningen visat att eleverna förbättrade sina matematikkunskaper när de använde detta verktyg jämfört med en kontrollgrupp utan datorer. Resultatet från studien visar på betydelsen av en långsiktig kompetensutveckling av lärarna för en framgångsrik integration av datorn som verktyg i klassundervisningen. Den visar på att när lärare och elever ges tillgång till bärbara datorer är det bara det första steget mot att använda tekniken som ett effektivt pedagogiskt och lärande verktyg. Det är ett nödvändigt steg, men inte tillräckligt, för att förbättra elevernas lärande i matematik. Annan forskning visar inte lika tydliga resultat. Ett projekt som liknar det som beskrivits ovan har pågått i Falkenbergs kommun sedan 2007. Kroksmark (2011) har tagit del av den utvärdering som gjorts och diskuterar resultatet och belyser att elevernas meritvärde kom att ”under 2009 och 2010 dala till bottennivå 190” och skriver att det är anmärkningsvärt att inte detta diskuteras.

Lingefjärd (2011) menar att användandet av tekniska hjälpmedel i undervisningen ökar. Dessa nyttjas på flera olika sätt som till exempel via interaktiva skrivtavlor, bärbara datorer och mobiltelefoner. ”På samma sätt som passare, gradskivor, linjaler och rutat papper har blivit självklara redskap hemma hos eleverna likväl som i skolan, kommer datortekniska hjälpmedel snart ses som självklara verktyg för elevers arbete med skolmatematik även utanför skolan” (s. 191). Lingefjärd och Holmqvist (2001) skiljer mellan undervisningsprogram och verktygsprogram. Undervisningsprogram kallas även för pedagogiska program som de menar kännetecknas av att de inte kan göra mer än vad de är avsedda för. Verktygsprogram, dit GeoGebra räknas, är flexibla och användaren behöver kunna programmen. Fördelar med verktygsprogram är dels att det tar kortare tid att konstruera en figur och kunna variera den än om den gjorts med papper och penna, dels att det matematiska innehållet kan kommuniceras på ett nytt sätt. Nackdelen menar de är att elever kanske inte reflekterar tillräckligt över vad de ser och då kan göra felaktiga generaliseringar.

Kroksmark (2011) påpekar att det nu sker en förändring av hur lärare planerar sin undervisning och elevers lärande. Han menar att det sker en övergång från analogt klassrumslärande till ett globaliserat och digitalt lärande. De analoga erfarenheterna förs in i en digitaliserad värld. Kroksmark definierar detta som en stretchad livsvärld. Han har gjort en kvalitativ studie på fem grundskolor där alla elever har tillgång till bärbara datorer. Den visade att när digitala arbetsmetoder används förändras lärarnas positioner i klassrummet och synen på elevernas sätt att ta till sig, bearbeta och utveckla kunskaper förändras. Fokus flyttas från undervisningsprodukten till processen och kunskapsbegreppet förändras från reproduktion till nyskapande. Ett digitalt didaktiskt tänkande tar över lärarkompetensen. Kroksmark menar vidare att i en-till-en undervisning måste lärare i sin planering ta hänsyn till olikheter, det vill säga att elever lär sig på olika sätt. Han för in begreppet variation som enligt hans beskrivning innebär att lärandet alltid är beroende av att få erfarenheter av det man ska lära sig på varierande sätt. Han påpekar att en-till-en undervisning gynnar variationen som grund för lärande. ”Vi är olika och vi lär på olika sätt som en effekt av att vi har olika erfarenheter av att vara människor. Det är de skillnader som en-till-en kan justera för” (s. 19).

Gustafsson, Jakobsson, Nilsson, Zippert m.fl. (2011) poängterar att: ”För att få en djupare förståelse av matematiska begrepp måste vi erövra olika representationer och även kunna göra översättningar mellan dem” (s. 36). Även Lingefjärd (2011) framhåller detta och menar att det ger ett gott underlag för ”reflekterande abstraktion”. Han påpekar att med hjälp av tekniska hjälpmedel är det möjligt att låta elever se begrepp åskådliggjorda på många olika sätt. Han menar att sambandet mellan förståelse av begrepp och olika representationsformer inte går att negligera. Gustafsson m.fl. (2011) menar att ha tillgång till olika representationer innebär att: ”Ett begrepp förstås bättre och blir mer användbart då vi kan se det från olika håll” (s.38). Ahlberg (2001) framhåller att det är genom att synliggöra olika elevers uppfattningar och låta dem bilda innehållet i undervisningen som eleverna kan förändra och utveckla sin egen förståelse. Att skriftligt förklara hur olika representationer och ett matematiskt begrepp hänger ihop är för många elever svårt. Löwing och Kilborn (2002) skriver att: ”Det är med hjälp av vårt språk som vi tillägnar oss matematisk information, bearbetar den, kommunicerar den och konstruerar ny matematisk kunskap” (s. 200- 201). Att få förklara muntligt underlättar för många elever framhåller Gustafsson m.fl. som menar att en-till-en projekt med dess möjligheter underlättar detta genom till exempel skärminspelningsprogram då talet spelas in.

IKT inom specialpedagogiken har fått ökad betydelse på grund av de många innovationer som medför att teknik kan användas för att stödja barn med särskilda behov.

> What is ultimately important is not the hardware but how it is used, the pedagogy that underlies the classroom world. For example, if we observe pupils working in groups it is the quality of the talk and discussion rather than the control of the keyboard that is paramount. Here SEN (special educational needs, vår kommentar) students can be empowered to make a fundamental contribution alongside their peers and we are able to see real inclusion demonstrated (Florian & Hegarty, 2004, s. Xii).

Lingefjärd (2008, 2009) beskriver Geogebra som ett dynamiskt dataprogram vars främsta styrka finns inom geometri och algebra. Med hjälp av programmet och de konstruktioner som kan byggas kan användaren konkret undersöka matematiska problem och enkelt variera olika variabler. Genom att snabbt kunna förändra till exempel en geometrisk figur eller ett algebraiskt uttryck antingen direkt i arbetsområdet eller genom att ändra det algebraiska uttrycket kan tankemödan läggas på begreppslig förståelse istället för på tidskrävande ritande med papper och penna. Programmet GeoGebra är skapat av Markus Hohenwarter (Professor for mathematics education at the Johannes Kepler University Linz, Austria, hämtat från GeoGebra.org, 2 januari 2011). GeoGebra är ett program som är gjort för undervisning inom gymnasieskolan men kan användas inom hela skolsystemet, från den tidiga grundskolan till universitetet. Lingefjärd (2009) menar att på grund av att programmet är avsett för undervisning är det lätt att komma igång med och konstruktionerna kan dessutom spelas upp igen. GeoGebra är ett Javabaserat program, det vill säga plattformsoberoende, och det är gratis. Programmet laddas ner från geogebra.org. Screencast-O-Matic är ett online-dataprogram, http://www.screencast-o-matic.com/, som också är gratis. Programmet spelar det in det som händer på skärmen och den muntliga kommunikationen mellan eleverna. I kombination med GeoGebra kan Screencast-O-Matic användas för att till exempel låta eleverna visa och berätta om hur de löst ett matematiskt problem för formativ bedömning eller att lärare via lärplattform låter elever ta del av lösta matematiska uppgifter.

5. Metod

I följande kapitel beskrivs och motiveras den valda metodens och dess för- och nackdelar diskuteras. Studiens utformning och genomförande samt studiens begränsningar redovisas.

5.1 Val av metod

Holme & Solvang (1997) beskriver metoden som ett redskap för att lösa problem och komma fram till ny forskning. Den induktiva metoden bygger enligt Hartman (2004) på att observera verkligheten utan att utgå från teorier, där analysen går ut på att finna regelbundenheter som observationerna kan stödja. Den deduktiva metoden utgår från en teori eller hypotes och Alvesson och Sköldeberg (2008) menar att det deduktiva är motsatsen till det induktiva, det vill säga den generella teorin kan förklara ett enskilt fall. Svagheten är, menar de, att den inte förklarar något utan mer slår fast hur det är. I abduktion tolkas det enskilda utifrån ” ett övergripande hypotetiskt mönster” (s.55) som behöver styrkas med fler iakttagelser. Den riktar in sig på underliggande mönster vilket inbegriper förståelse. I vår studie utgår vi ifrån den induktiva metoden eftersom observationerna används för att finna de samband som analyseras i resultatet.

En kvantitativ metod är enligt Holme och Solvang (1997) kännetecknad av selektivitet och avstånd i förhållande till informationskällan. Frågeställningen bestämmer vilka förhållanden som är av särskilt intresse. Undersökningen är färdigstrukturerad redan i teori- och problemformuleringsfasen. Hartman (2004) menar att i en kvantitativ metod är de egenskaper som undersöks mätbara. En kvalitativ metod beskrivs av Alvesson och Sköldeberg (2008) som menar att ett centralt kriterium är att empirin är öppen och mångtydig men de betonar även vikten av kategoriseringar, där tolkningsarbetet är i fokus. Ett annat viktigt särdrag som de belyser är att en kvalitativ metod tar sin utgångspunkt i studiesubjektens perspektiv där forskaren är närvarande. Holme och Solvang menar att den kvalitativa metoden i första hand har ett förstående syfte. Det centrala blir att samla in information för att få en djupare förståelse samt beskriva helheten av det problem som studeras. Utgångspunkt i denna studie har hela tiden varit att få en fördjupad förståelse och kunskap när vi söker svar på forskningsfrågorna. Detta har skett genom en fallstudie, där vi har observerat hur elever hanterar tal i bråkform med datorn som verktyg där programmet GeoGebra används, och därför anser vi att denna studie är kvalitativ. Med en kvantitativ metod där frågorna bestämts i förväg hade denna fördjupade kunskap inte varit möjlig att uppnå. Elevernas verklighet och alla nyanser kan enklare fångas upp i en kvalitativ studie.

Metoder som beskrivs i litteratur (Alvesson & Sköldeberg, 2008; Hartman, 2004; Holme & Solvang, 1997 m.fl.) delas in i kvantitativa och kvalitativa. Åsberg (2000, 2001) menar att det inte är metoden som är kvantitativ eller kvalitativ utan att det är empirin som avgör detta. Det är alltså egenskaperna hos det insamlade materialet som är kvantitativt eller kvalitativt inte den metod som används vid insamlandet. I denna studie hade det varit önskvärt att urvalet skett kvalitativt via samtal med eleverna för att få insikt i deras förståelse av det matematiska område vi valt. Fokus i denna studie är på de elever som visar svårigheter med att hantera tal i bråkform och dessa elever hade synliggjorts bättre på detta sätt menar vi. Att urvalet gjordes kvantitativt, med en diagnos, beror på att den tid som fanns till förfogande var begränsad. Löwing och Kilborn (2002) beskriver kunskapsdiagnos som ett sätt att ta reda på elevernas förkunskaper genom att använda väl formulerade frågor muntigt eller skriftligt för att undervisningen ska kunna möta elevernas kunskapsnivå. Nackdelen med att använda ett kvantitativt urval där vi inte får fördjupad information om elevernas förkunskaper kan kompenseras av att kvalitativ data används vid analys av hur eleverna hanterar tal i bråkform. Denscombe (2009) påpekar att flera olika metoder kan användas i samma studie för att kompensera svagheter i en metod med starka sidor i en annan. Vi har därför valt att göra en studie med ett kvantitativt urval av elever och där insamlad data har kvalitativa egenskaper.

Med utgångspunkt i studiens frågeställningar funderade vi på hur empirin skulle samlas in och vilka teorier och metoder som kunde användas för att besvara dessa. Inledningsvis var tanken att göra en etnografiskt inspirerad studie med aktionsforskning. Avsikten var att använda flera olika metoder samt vara delaktiga i den pedagogiska praktiken och påverka det som studeras, för att öka lärandet både för oss och också för de lärare vars elever som skulle delta i vår studie. Diskussioner kring vår praktiska verklighet och den tid vi hade till förfogande gjorde att vi valde att göra en fallstudie eftersom den ger en fördjupad förståelse av det som studeras och inte behöver ta lika mycket tid i anspråk. Fallstudier fokuserar, enligt

Denscombe (2009), på en undersökningsenhet med avsikten att ge en fördjupad redogörelse för händelser och erfarenheter.

5.1.1 Fallstudien som forskningsmetod

En fallstudie definieras som en undersökning av en specifik företeelse (Merriam, 1994; Denscombe, 2009). Detta avgränsade eller definierade system väljs för att det är angeläget och intressant eller för att det innehåller någon form av hypotes. Med fallstudien som metod strävas efter att belysa viktiga faktorer som utmärker händelsen eller situationen genom att fokusera på en enda händelse eller en situation. Denscombe betonar att målsättningen är att belysa det generella genom att se det enskilda. Att inhämta värdefulla och unika kunskaper genom att studera saker i detalj synliggörs av Denscombe som menar att:

> När en forskare fattar det strategiska beslutet att ägna all sin energi åt att studera en enda undersökningsenhet finns det självklart mycket större möjligheter att gå på djupet och upptäcka saker som kanske inte skulle ha blivit synliga vid en mer ytlig undersökning (s. 60).

Merriam (1994) påpekar att fallstudien som metod koncentrerar sig på en viss situation, händelse, företeelse eller person. Den fokuserar på hur grupper av människor hanterar utmaningar av olika slag utifrån ett helhetsperspektiv. Denscombe (2009) menar att fallstudien möjliggör att forskaren går på djupet för att kunna förstå det komplexa i en given situation. Genom att kunna upptäcka hur många olika delar påverkar varandra kan det som studeras ses i en helhet. Fallstudier inriktar sig ofta på att se det holistiska istället för enstaka faktorer. Fallstudiens verkliga värde är att den ger möjlighet att förklara ”varför vissa resultat kan uppstå – mer än att bara ta reda på vilka dessa resultat är” (s. 61). En egenskap hos fallstudien, enligt Merriam, är att beskrivningen av det som studerats är omfattande och tät. Detta innebär en fullständig och bokstavlig skildring av det som studerats där variablerna ska vara många och samspelet mellan dem ska beskrivas. Hon menar också att fallstudien kan bättra på förståelsen av det som studerats genom att nya betydelser skapas, erfarenheter vidgas och det kända bekräftas. I fallstudien skapas hypoteser, begrepp och generaliseringar från den information som finns och som har sin grund i den kontext där undersökningen sker. Kvalitativa fallundersökningar utmärks av upptäckter av nya relationer och begrepp samt ny förståelse istället för att utgå från en teori eller modell.

Denscombe (2009, s. 62) menar att fallstudien betonar:

- studiens djup snarare än studiens bredd,
- det speciella snarare än det generella,
- relationer/processer snarare än resultat och slutprodukter,
- holistiskt synsätt snarare än isolerade faktorer,
- naturliga miljöer snarare än konstlade situationer,
- flera källor snarare än en undersökningsmetod.

En fördel med fallstudien som metod, framförd av Merriam (1994), är att den tar sin utgångspunkt i verkliga händelser och därför leder till en innehållsrik och holistisk beskrivning av företeelsen. Detta medför att fallstudien är särskilt lämpad för att öka kunskaperna inom lämpade delar av pedagogiken, där processer och problem kan undersökas för att ge förståelse. Denscombe (2009) menar att en annan av fallstudiens fördelar är att den uppmanar till att använda flera olika källor, data och forskningsmetoder. Alla metoder som är intressanta för studien kan användas för att undersöka de relationer och processer som är intressanta. Denscombe menar också att när forskningen är begränsad av tid och resurser kan fallstudien vara en bra metod eftersom ansträngningarna koncentreras till en eller några få undersökningsplatser. En nackdel som Merriam belyser är att med fallstudien som metod kan en studie med innehållsrik och fullständig beskrivning och analys av en situation, bli för lång och detaljerad. Ett hinder kan också vara att vid analys av det insamlade materialet är forskaren ensam vid större delen av arbetet, vilket skapar en tillit till forskaren som kan göra en trivial eller felaktig analys. Denscombe menar att svårigheter med att skaffa sig tillträde till studiens miljöer kan påverka forskningsprocessen. Även forskarens närvaro kan göra att de som undersöks kan agera annorlunda än vanligt. Denscombe påpekar också att fallstudien får mest kritik när det gäller trovärdigheten i de generaliseringar som kan göras.

5.2 Insamling av empiri

Empirin samlades in genom att eleverna, som arbetar i par, använde ett skärminspelningsprogram så att vi kunde ta del av elevernas samtal och det som sker på deras datorskärmar. Eleverna har befunnit sig i sin vanliga klassrumsmiljö tillsammans med sina klasskamrater när de arbetat med matematikuppgifterna, vilket innebär att den kontext som utgör undersökningens utgångspunkt är något som existerar och är inte en konstlad situation i forskningssyfte. Det som har avvikit från den kontext de är vana vid i matematikundervisningen är att läraren inte alltid har varit närvarande i klassrummet och att eleverna har använt datorn som verktyg. Vi tror inte att empirin påverkats av att vi ibland var ensamma med eleverna men däremot tror vi att elevernas ovana vid att använda datorn som ett verktyg i matematikundervisningen kan ha påverkat empirin eftersom de inte hade kännedom om de möjligheter datorn kan ge.

5.3 Val av undersökningsgrupp

Studien var från början tänkt att genomföras i årskurs 5 då eleverna har hunnit skaffa sig viss datorvana. En annan tanke var att kunna vidga vår erfarenhet som lärare då vi främst har undervisat i de tidigare åldrarna respektive de senare åldrarna på grundskolan. Eftersom studien bygger på att eleverna har tillgång till en dator per två elever kontaktades kommunens IT-ansvarige för att få information om vilka skolor i årskurs 5 som har dessa resurser. Det visade sig att endast årskurs 7-9 har denna datortäthet då dessa elever har var sin dator. Detta avgjorde att vi riktade in oss på dessa åldrar. För att få kontakt med matematiklärare som var intresserade av att delta i studien skickades i november 2011 ett informationsbrev till 6 rektorer i en kommun. Vi blev kontaktade av en F-9 skola i en medelstor kommun. Två lärare som undervisar i årskurs 8 och som ansvarar för var sin klass var intresserade av att delta. Vid första mötet med lärarna diskuterades studiens innehåll, omfattning och urval av elever. I de båda klasserna finns det sammanlagt 40 elever. Det var 18 elever som valde att delta i studien varav 6 går i den ena klassen och 12 i den andra. För att kunna utnyttja datorprogrammet GeoGebras dynamiska möjligheter var studiens planerade matematikområde geometri. Detta passade inte in i lärarnas planering eftersom eleverna arbetat med geometri under höstterminen. Under tidsperioden för genomförandet var elevernas arbetsområde procent. Ett viktigt begrepp för att förstå procent är ”del av”. Enligt Löwing (2008) krävs det en god taluppfattning kopplat till bråk för att eleverna ska förstå procent och de matematiska modeller som används vid procent grundar sig i bråkräkning av andelar. Detta avgjorde studiens inriktning där vi fokuserar på begreppen ”del av en helhet” och ”del av antal”.

Urvalsgruppen är elever som visar svårigheter inom matematikområdet ”del av” och frågan blir då hur kategoriseras dessa? Ett sätt skulle kunna vara att välja elever som har åtgärdsprogram i matematik. Ett annat sätt skulle kunna vara att lärarna som vet elevernas kunskapsnivå föreslår vilka som bör ingå i studien. Ett tredje sätt skulle kunna vara att använda en diagnos som urvalsinstrument. Att använda en diagnos har fördelen att hela elevgruppen kartläggs inför urvalet. Nackdelen är att en testsituation alltid påverkas av elevens dagsform och testets utformning. Att låta lärarna utifrån sina undervisningsgrupper välja ut eleverna har fördelen att de har en fördjupad kännedom om elevers kunskapsnivå. Nackdelen kan vara att bedömningen blir subjektiv och varierar från lärare till lärare. Att utgå ifrån åtgärdsprogram innebär att det ska finnas en pedagogisk utredning kring dessa elever och att det därmed har blivit konstaterat att de är i matematiksvårigheter. Den fråga vi ställer oss kring nackdelar med denna urvalsmetod är om det finnas elever som visar svårigheter inom matematikområdet del av men som inte har ett åtgärdsprogram? Ett åtgärdsprogram ska skrivas när det finns en oro för att eleven inte uppnår kunskapskraven. För att göra ett urval har vi valt att använda delar av Diamant (Skolverket 2009) som är ett diagnostiskt material för grundskolans tidigare år. Eftersom eleverna som ingår i studien går i årskurs 8 har vi kompletterat med egna uppgifter för att öka svårighetsgraden något. Vi menar att, utifrån våra erfarenheter som matematiklärare, mäter diagnosen kunskaper som kan anses vara grundläggande för årskurs 8. Löwing (2008) påpekar att för att få kunskap om vilka elever som sannolikt saknar en viss kunskap kan det vara lämpligt att inleda med en skriftlig diagnos. ”När man använder tester bör man dock vara medveten om vad de mäter och inte mäter. Vissa aspekter av elevernas lärande fokuseras och andra lämnas utanför” (Ahlberg 2001, s. 62). Syftet med diagnosen i denna studie är att mäta elevernas aritmetiska förståelse och kompetens samt att se den spatiala förmågan inom området ”del av” (bilaga 5). Efter analys av diagnosen framkom att av de 18 elever som gjorde diagnosen var det sammanlagt 8 elever som visar på svårigheter inom matematikområdet ”del av”. På grund av att alla tillfrågade elever inte ville delta i studien blev urvalsgruppen mindre än önskat. Detta är något som Hartman (2004) belyser när han tar upp två faktorer som påverkar urvalet: dessa är vad som är möjligt att göra och tidsaspekten. Båda dessa faktorer har påverkat studien. För att göra studien möjlig var vi beroende av datorer samt lärares och elevers vilja att medverka och vår tidsram tillät inte en utvidgning till andra kommuner för att få en större urvalsgrupp.

5.4 Genomförande

I detta avsnitt redogörs för förberedelse, förstudier, elevuppgifter och studie. Datorn används dels för att ge eleverna ett dynamiskt visuellt verktyg, dels som metod för att vi ska få möjlighet att ta del av hur eleverna hanterar tal i bråkform.

5.4.1 Förberedelser inför studien

För att kunna använda datorprogrammet GeoGebra och visa dess möjligheter för lärarna och eleverna började vi med att lära oss programmet genom att använda www.GeoGebra.com där det finns instruktionshandledningar samt länkar till färdiga program/uppgifter. Inför studien diskuterade vi hur GeoGebra skulle kunna användas för att undersöka procentuppgifter. Det visade sig inte vara helt enkelt att hitta/göra procentuppgifter som använder de möjligheter som GeoGebra kan ge. Därför valdes begreppen ”del av en helhet” och ”del av antal” som är viktiga kunskaper för att utveckla förståelse för procent. Vi tog fram två olika applikationer om tal i bråkform där pizzamodellen som representationform användes till den ena och kvadratmodellen till den andra. För att dokumentera elevernas samtal och deras arbete på datorskärmen valdes skärm- och ljudinspelningsprogrammet Screencast-O-Matic. I januari 2012 träffade vi lärare och rektor för att presentera studiens utformning, visa Screencast-O-Matic samt att visa GeoGebras möjligheter som ett dynamiskt verktyg. Eleverna genomförde diagnosen i februari 2012 och med utgångspunkt i deras resultat parade vi ihop elever med liknande kunskaper.

5.4.2 Förstudier

- En första förstudie genomfördes med två elever där de två applikationerna (se bilaga 3) användes. Resultatet visade att eleverna efter genomgång kunde hantera datorprogrammen GeoGebra och Screencast-O-Matic men att uppgifterna inte var konstruerade för att stimulera till samtal mellan eleverna. Förstudien visade också att elevdatorernas mikrofon inte var av tillräcklig kvalitet för att vi skulle kunna uppfatta det inspelade samtalet.
- I den andra förstudien var uppgifterna till den ena applikationen omarbetade (se bilaga 4) och den andra applikationen togs bort. Med hjälp av externa mikrofoner löstes ljudproblemet. Vid detta tillfälle deltog 8 elever och det visade sig att de samtalade mer men vi såg ett behov av öppna uppgifter där problemlösningsförmågan skulle komma i fokus och inte aritmetiken, för att ge eleverna i urvalsgruppen möjlighet till att visa andra matematikförmågor. För att få inspiration till hur sådana uppgifter kan vara uppbyggda har gamla nationella ämnesprov i matematik för årskurs 9 använts samt uppgiften om Bråk/del av i bedömarträning för årskurs 6 (Skolverket 2011c).

- Två helt nya uppgifter, elevuppgift 1 och 2 (bilaga 6 och 7), konstruerades som i förstudie tre utprovades på två elever. Denna förstudie visade att uppgifterna fungerade som tänkt, det vill säga hade en större öppenhet i problemformuleringen och därmed gav ökade möjligheter till diskussion och att eleverna använde datorn som ett visuellt stöd vid problemlösningen.

- I förstudie fyra användes den elevuppgift, med applikationen pizzamodell som representationsform, som ingick i förstudie två. Uppgiften gjordes i de två klasser som ingår i vår studie. Alla elever i klasserna deltog eftersom lärarna önskade att de skulle få prova att använda datorn i matematikundervisningen. Vår tanke var att alla elever skulle få vara med när vi genomförde studien men att vi endast skulle ta del av empirin från de elever som skulle komma att ingå i studien. Lektionen inleddes med en kort genomgång av programmen och hur studien skulle gå till väga. Alla elever använde Screencast-O-Matic och spelade in när de arbetade. De elever som skulle ingå i studien sparade sina inspelade filer på USB-minnen som vi tillhandahöll. Syftet med denna förstudie var att eleverna skulle lära sig hantera datorprogrammen och att vi skulle få erfarenhet av hur det fungerar när studien utförs i helklass. Vi insåg att det var svårt att hinna med alla elever och beslöt, i samråd med lärarna, att utföra den kommande studien med endast de elever som valt att delta i denna.

5.4.3 Elevuppgifter

I studien arbetar eleverna med två uppgifter som de får möjlighet att lösa med visuellt stöd. Vi funderade kring vilka representationsformer som gynnar elevernas förståelse och hur dessa skulle kunna utformas i GeoGebra. Bentley (2011) diskuterar olika visuella representationsformer och menar att kvadratmodellen har högst kvalitet och därför används denna i studien.

5.4.3.1 Elevuppgift 1

I skolans bollförråd finns det tre olika sorters bollar. Hälften är fotbollar, en tredjedel är basketbollar och resten är innebandybollar. Hur många fotbollar, basketbollar och innebandybollar finns det i förrådet? Finns det andra lösningar? Om ja, vilka då?

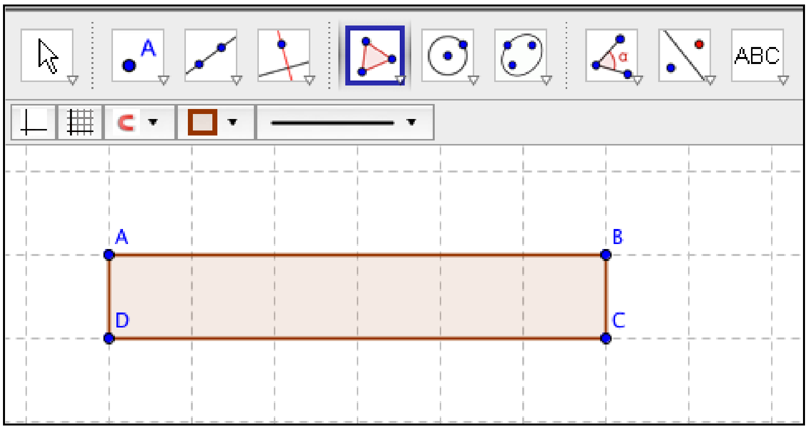
Den kompetens vi önskar att uppgiften speglar är hur elever hanterar ”del av antal”.

Grafisk representation:

6 st 12 st

Bask.	Bask.	Bask.				$\frac{1}{3}$
Bask.	Bask.	Bask.				
Fotb.	Fotb.	Fotb.				$\frac{1}{2}$
Fotb.	Fotb.	Fotb.				
Fotb.	Fotb.	Fotb.				
Inneb	Inneb.	Inneb.				

Eleverna konstruerar efter instruktioner en rektangel som utgångspunkt för elevuppgift 1.



5.4.3.2 Elevuppgift 2

Malin och Peter klipper sina gräsmattor.
När Malin har klippt en tredjedel av sin gräsmatta har Peter klippt två femtedelar av sin. De har då klippt lika mycket. Vem har störst gräsmatta?

Den kompetens vi önskar att uppgiften speglar är hur elever hanterar ”del av en helhet” där det är två olika helheter.

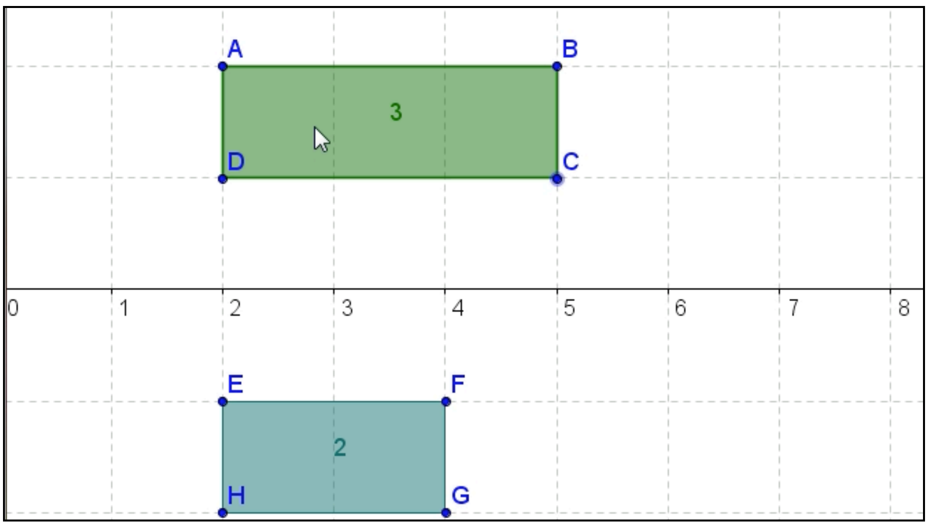
Grafisk representation:

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{3}{3} = 1$ $\frac{1}{5} \cdot 6 = \frac{6}{5} \rangle 1$

Denna applikation i GeoGebra får eleverna att utgå ifrån.



5.4.4 Studie

Till uppgift 1 får eleverna, utifrån instruktioner, skapa en rektangel som går att variera i storlek och för detta använder vi programmet GeoGebra. När eleverna är klara med uppgiften sparas den på ett USB-minne innan de börjar med nästa. I uppgift 2 får eleverna via USB-minne en applikation gjord i GeoGebra som visuellt stöd. En svårighet som uppstod var att när eleverna var klara med uppgift 1 fick de vänta innan de kunde börja med nästa uppgift, eftersom det tog lång tid att spara uppgifterna på USB-minne. I efterhand kan vi konstatera att det nog hade varit bättre att spara i ett mindre tungt format eller, som två elever kom på, att det gick fortare att först spara på datorns skrivbord. En annan svårighet som uppstod var att flera av elevdatorerna i den ena klassen fungerade dåligt och mycket tid gick åt till att hjälpa eleverna. Trots tekniska problem kunde alla elever i studien utföra och spara arbetet. Det hade varit önskvärt att ett elevpar i taget hade fått arbeta med uppgiften samtidigt som den spelades in, för att få en lugnare lärmiljö men detta hade varit svårt att genomföra tidsmässigt. Ett elevpar i taget hade också gett möjlighet att på ett bättre sätt stödja eleverna i deras tekniska handhavande. Tekniska problem som uppstod var långsam internetuppkoppling, program som behövde uppdateras, datorer som inte fungerade och fick bytas ut. Detta innebar att flera elever fick sitta och vänta vilket skapade viss oro i klassrummet. Eleverna var dessutom nyfikna och snabba på att själva hantera datorn vilket medförde att de ibland fick svårigheter och inte visste hur de skulle gå vidare.

En styrka med att använda skärminspelning som insamlingsmetod är att elevernas uttalade uppfattningar och kunskaper visas på ett levande sätt. Inspelningen gjordes i en för eleverna naturlig klassrumsmiljö där de befann sig tillsammans med sina klasskamrater och de verkade inte påverkas av att deras arbete på datorn spelades in. Detta kan jämföras med en intervjusituation eller enkät där eleverna ofta svarar på ett sätt som de tror förväntas av dem. Merriam (1994) påpekar att intervjuare och respondent har med sig fördomar, förutfattade meningar och attityder som påverkar den information som kommer fram.

Empirin består av 14 stycken inspelningar uppdelade på två olika elevuppgifter. Inspelningarna varierar i längd från 57 sekunder till 13,14 minuter. För att få en överblick över materialet lyssnade och tittade vi på alla inspelningar. Det visade sig att ljudkvaliteten varierade beroende på var den externa mikrofonen var placerad, hur högt eleverna talade och om de talade i mun på varandra, samt hur mycket ljud från andra elever i klassrummet som togs upp av mikrofonen. Även ljud när eleverna upprepade gånger vidrörde mikrofonerna och knackade på bänken gjorde det svårt att uppfatta vad som sades. En positiv överraskning är att vi anser oss kunna uppfatta elevernas känslostämningar när de arbetade med uppgifterna. För att inte missa viktig information beslutade vi att transkribera alla inspelningar. Denscombe (2009) belyser tre orsaker som kan göra en bandinspelning svår att skriva ut:

- Det är inte alltid lätt att höra vad som sägs på inspelningen.
- Människor talar inte alltid i fullständiga och avslutade satser.
- Intonation, betoning och uttal är svårt att fånga in i en utskrift.

Genomförandet av transkriberingen tog lång tid på grund av ljudkvaliteten. Tillvägagångssättet var att lyssna på 5-10 sekunders inspelning i taget, skriva ner det som uppfattades, gå tillbaka och lyssna igen vilket upprepades flertalet gånger. När inspelningen var transkriberad lyssnade vi igenom hela inspelningen från början och kontrollerade mot det transkriberade materialet. Transkribering är inte ett mekaniskt arbete, påpekar Denscombe (2009), där inspelat tal överförs till skrivna meningar. Det skrivna talet måste redigeras för att det ska bli begripligt och därför blir det inte identiskt med verkligheten. I denna studie har i transkriberingen beskrivningar av situationen markerats i kursiv stil och vårt eget tal i fet stil. När eleverna har bett om hjälp eller när vi har märkt att de inte vet hur de skall angripa uppgiften har vi ställt frågor för att utmana deras tankar. Detta gjorde att även vårt tal spelades in. När det var svårt att uppfatta vad som sades gjordes en rimlig tolkning utifrån sammanhanget och det som visades på datorskärmen. I enstaka fall har data som inte kunde uppfattas förbisetts men vi tror inte att det har någon större påverkan på resultatet, eftersom det skedde i en mycket begränsad omfattning både vad det gäller frekvens och tid. Målsättningen vid transkriberingen har dock varit att det ska bli så verklighetsnära som möjligt.

Vi funderade på om vår förkunskap om de olika elevpar som uppnåtts genom arbete med diagnosen och från inspelningssituationer i klassrummet skulle kunna påverka vår tolkning och därmed vårt resultat. För att minimera risken för detta gav vi alla par nya beteckningar efter transkriberingen. Utifrån varje transkribering gjorde vi sedan en tolkning av hur eleverna löst uppgiften och citat som belyste detta noterades. Även en beskrivning av det eleverna visade på inspelningen dokumenterades. Vid tveksamhet, som uppstod i ett par fall, gick vi tillbaka till inspelat material för att vara så säkra som möjligt på att vi uppfattat det rätt.

Vårt nästa steg var att fundera på hur vi skulle hantera empirin. Det som framkom tidigt var att i empirin tyckte vi oss kunna se inte bara elevernas matematiska lösningar utan flera andra faktorer som påverkade hur de löste uppgifterna. Elevernas matematiska förmåga var naturligtvis en stor del i insamlad empiri men även faktorer som elevernas tilltro till sin förmåga, strategier, reflektion, förklaringsförmåga och uthållighet anser vi oss kunna se. Lester (1996) menar att det krävs mycket mer än bara matematikkunnande för att kunna lösa problem. Han beskriver fem kategorier, (se problemlösning s. 15), som samspelar vid elevers problemlösningsförmåga.

- Kunskapande och användning
- Kontroll
- Uppfattningar av matematik
- Affekter
- Socio-kulturella sammanhang

När det empiriska materialet jämfördes med Lesters kategorier menar vi att elevernas uppfattningar om matematik och deras socio-kulturella sammanhang inte fanns tillgängligt och därför har vi bortsett från dessa kategorier i resultatredovisningen. När empirin skulle tolkas utifrån den första kategorin insåg vi behovet av att kunna strukturera upp resultatet i underkategorier, eftersom fler aspekter av elevernas matematikkunskaper då skulle kunna uppmärksammas. Med utgångspunkt i att en av uppgifterna inspirerats av Bedömarträning åk 6 använde vi de fyra förmågor som Skolverket (2011c) lyfter fram.

- Problemlösning
- Begrepp
- Metod och beräkning
- Resonemang och kommunikation

Vi har valt att inte använda problemlösning som en underkategori på grund av att Lester (1996) tillämpar ordet problemlösningsförmåga som en funktion av sina fem kategorier. De kategorier som används i denna studie är:

- Kunskapande och användning
  - metod och beräkning
  - begrepp
  - resonemang och kommunikation
- Kontroll
- Affekter

De 7 elevparen tilldelades var sin bokstav från A-G för att de ska kunna urskiljas i resultatet. Därefter har vi grupperat paren, med utgångspunkt från de kunskaper de visat på diagnosen, i nivå 1-3 Dessa nivåer markeras med parentes efter parens bokstäver. Även i elevuppgift 1 och 2 har eleverna nivågrupperats och då används nivå I-III. Detta har gjorts för att lättare kunna jämföra elevernas kunskaper med diagnosen och se om eleverna använder och visar sina kunskaper på ett annat sätt när datorn används för att ge ytterligare en representationsform. Nivågrupperingarna har gjorts från de erfarenheter vi fått som matematiklärare och från vårt nuvarande arbete som speciallärare. Ett stöd vid tolkning av hur eleverna använt sina kunskaper har varit Skolverkets bedömarträning (2011c) och kunskapskrav för åk 9 i matematik (Skolverket 2011a).

5.5 Studiens begränsningar

I detta avsnitt redogörs för studiens bortfall, reliabilitet, validitet, generaliserbarhet och den etiska hänsyn som tagits.

5.5.1 Bortfall

I båda klasserna var det sammanlagt 40 elever. Av dessa var det elever och deras vårdnadshavare som valde att inte delta. Bortfallet var 69 % i den ena klassen och 43 % i den andra klassen. Detta påverkar självklart resultatet i studien då vi med en större urvalsgrupp troligtvis hade fått en större variation av hur elever löser uppgifter. Vi har diskuterat och funderat över varför elever valde att inte delta. Särskilt i den ena klassen var detta märkbart. Efter funderingar kring detta kom tanken att detta kan bero på att studien inte presenterats för eleverna av oss vilket gjorde att de inte hade fått möjlighet att träffa oss och ställa eventuella frågor. Holme och Solvang (1997) påpekar att en viktig del i arbetet är att motivera de personer som ska svara. Ett besök gjordes då i klasserna för att få ett personligt möte med eleverna. Detta resulterade inte i att fler elever i den klass med lågt deltagarantal ville delta i studien, men i den andra klassen var det flera som då anmälde sitt intresse. Till en viss del kan man anta att det berodde på grupptryck, denna slutsats dras från att det var så många i den ena klassen som avstod. En annan tänkbar förklaring är att vissa av de elever som behöver utveckla sina kunskaper avstod på grund av att de inte ville visa sina svårigheter. En tredje tänkbar förklaring är att vårdnadshavare var osäkra och inte vill utsätta sina barn för en okänd situation. Vid genomförandet av studien blev det ytterliggare bortfall på grund av sjukdom och ledighet. Fallstudien genomfördes med 14 elever.

5.5.2 Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet

Reliabiliteten handlar om hur noggrant man har mätt den aktuella variabeln. Holme och Solvang (1997) förklarar det som hur pålitlig insamlad data är. Enligt Merriam (1994) handlar reliabilitet om i vilken utsträckning ett resultat kan upprepas. ”Realiabiliteten hos en viss forskningsmetod grundar sig på antagandet att det finns en enda verklighet som kommer att föranleda samma resultat om vi upprepade gånger studerar denna verklighet” (Merriam, 1994,

s. 180). Men Merriam menar samtidigt att inom pedagogiska områden sker det en ständig förändring som både är komplex och kontextberoende. Den analys som sker är avhängig den person som bidrar med informationen och forskarens färdigheter. En upprepning av en kvalitativ undersökning kommer inte att ge samma resultat, men det innebär inte att den första undersökningen ska ifrågasättas eftersom flera tolkningar av samma händelse är möjlig.

Validitet besvarar frågan om det som vi avsåg att mäta har mätts. Med andra ord: ”/.../ forskningsfrågan måste överensstämma med den undersökning man faktiskt genomfört” (Göransson & Nilholm 2009, s. 138). I kvalitativa undersökningar har forskaren, enligt Holme och Solvang (1997), en stor närhet till det som studeras. Detta innebär att möjligheten för att få en valid empiri ökar. Holme och Solvang påpekar också att svårigheten med denna närhet är att forskarens upplevelse av situationen kan vara felaktig. Forskaren måste vara medveten sitt eget förhållningssätt och hur det eventuellt påverkar studien.

”Teoretisk generalisering innebär emellertid att resultaten – inklusive instruktionerna – mer eller mindre säkert kan generaliseras till en motsvarande pedagogisk situation” (Egerbladh & Tiller, 1998, s. 93). Detta framhåller även Merriam (1994) som menar att om resultatet i en fallstudie är generaliserbart beror på om det är möjligt att generalisera från ett enstaka fall eller från kvalitativa studier. För att öka möjligheten till generalisering måste forskaren ge en detaljerad beskrivning av den kontext där studien genomfördes. Om resultatet i denna studie ska kunna generaliseras teoretiskt måste hänsyn tas till kritiska aspekter, vilka är elevernas förkunskaper, hur eleverna samspelar, elevernas datorvana och klassrumssituation. Detta torde dock vara svårt eftersom underlaget är litet. I studien deltog 14 elever vilket naturligtvis är begränsande ur generaliseringssynpunkt. Kan svaren på våra forskningsfrågor generaliseras till andra elever i svårigheter med tal i bråkform? Vi är osäkra på detta men anser att det borde vara möjligt att se mönster i dessa elevers svårigheter.

5.5.3 Etiska överväganden

”Forskningsetik handlar om hur man i forskningen tar hänsyn till och skyddar olika deltagare, informanter, försökspersoner och andra som berörs av forskningen” (Ahlberg, 2009, s. 13). Ahlberg menar vidare att det är särskilt viktigt att tänka på i en specialpedagogisk studie som utgår ifrån elever i behov av särskilt stöd. Detta eftersom eleverna studeras och kategoriseras utifrån sina svårigheter och tillkortakommanden. Dessa tankar hade även lärarna funderat kring och de påpekade att det var viktigt att alla elever skulle få möjlighet att delta i studien så att ingen skulle känna sig utpekad. Detta stämde överens med våra tankar och därför har alla elever som önskat delta fått möjlighet att göra detta, även om vårt fokus har varit de elever som visar på svårigheter inom det valda matematikområdet. I denna studie, som består av sju grupper, funderade vi över om det skulle vara möjligt att identifiera en enskild grupp. För att minimera detta är tabellerna där resultatet redovisas konstruerade så att minst två gruppers poäng befinner sig i samma kolumn. I och med att eleverna har kännedom om sina egna gruppnummer och eventuellt även klasskamraters så valdes att benämna grupperna med bokstäver i stället för siffror. Detta gjordes slumpmässigt. Även analysen kan skapa etiska frågor eftersom forskaren påverkas av egna värderingar och teoretiska utgångspunkter (Merriam, 1994). Vi har funderat kring hur detta skulle kunna påverka analysen av det inspelade materialet och därför har skolverkets bedömarträning (2011) använts som stöd för att minska risken för detta. I studien har vi utgått ifrån Vetenskapsrådet (2002) och deras fyra etiska principer.

5.5.3.1. Informationskravet

Innan studien startade informerades skolledning och berörda matematiklärare om studiens syfte och innehåll. Därefter skrevs ett missiv som beskrev studiens syfte och upplägg samt informerade om konfidentialitet och hur insamlad data hanteras. Information gavs även om möjlighet att avbryta studien om så önskas. Missivet skickades hem till föräldrarna.

5.5.3.2 Konfidentialitetskravet

I studien kommer det inte att gå att identifiera kommun, skola eller enskilda elever. Denna fråga togs upp till diskussion av lärarna utifrån en omsorg om eleverna. Elevparen har tilldelats ett nummer som använts vid lagring av data på USB-minnen. Detta för att vid eventuell förlust av USB-minne går inte elever att identifieras. All information om eleverna raderas när studien är avslutad.

5.5.3.3 Samtyckeskravet

I studien deltar elever som ej fyllt 18 år och därför behövs vårdnadshavares godkännande. Endast de elever som lämnat missivet med vårdnadshavares påskrift har deltagit i studien. Detta gäller hela studien vilket omfattar diagnos och inspelade elevuppgifter.

5.5.3.4 Nyttjandekravet

I missivet informerade vi om att insamlad data endast används i denna studie och inte lämnas vidare för annat ändamål. Lärarna har därför inte delgivits enskilda elevresultat från diagnos och elevuppgifter. En ytterligare anledning var att eleverna inte skulle känna oro för att deras resultat skulle påverka lärarnas bedömning vid betygsättning. Detta var både lärarna och vi tydliga med vid information till eleverna.

6. Resultat

I detta avsnitt kommer vi att beskriva hur vi har gått tillväga när vi studerat vår empiri och sammanställt resultatet. Diagnosens resultat presenteras, både helheten och i delar utifrån de förkunskaper som provas i respektive uppgift. En mer utförlig redovisning av diagnosen finns som bilaga 6 och 7. Elevuppgift 1 och 2 redovisas efter varandra där skärmbilder från elevernas inspelningar visas för att tydliggöra resultatet. Vid inspelningen har eleverna själva markerat ytan av det område på datorskärmen som spelats in och detta medför att storlek och form på bilderna är olika. Redovisade elevuppgifter avslutas med var sin analys. Därefter redovisas elevernas affekter och kontroll vid problemlösningssituationerna. Resultatet avslutas med en sammanfattande analys.

6.1 Resultatredovisning

Eleverna delas in i par med utgångspunkt från att eleverna i första hand har liknande resultat på diagnosen, men förutsättningarna är att de även måste gå i samma klass och kan bilda jämna par. Elevparen grupperas därefter i tre nivåer där 1 representerar att de visar på liten kunskap om bråktal och 3 visar på grundläggande kunskaper. Poängintervallen delas in så att eleverna med liknande resultat tillhör samma nivå. Varje enskild elev i paret har ett sammanlagt resultat på diagnosen som ligger inom poängintervallet. På diagnosen finns uppgifter med som mäter elevernas förkunskaper inom områdena del av, proportionalitet, storleksordna bråk och problemlösning. Problemlösningsuppgifterna behandlas i resultatanalysen.

Tabell 1 Resultat på diagnos uppdelat på elevpar

Poäng	1-9	10-17	18-26	27-31
Elevpar		A och D	E och F	B, C och G
Nivå		1	2	3

Tabell 2 Elevparens sammanlagda resultat på uppgift 7, 8 och 13 i diagnosen som innehåller problemlösning

Elevpar	A	D	E	F	B	C	G
Del av antal Maxpoäng 6	0	0	3	6	2	5	3

6.1.1 Elevuppgift 1

Elevuppgift 1 visar hur eleverna hanterar del av antal samt hur några elever använder proportionalitet. Först redovisar vi de förkunskaper som eleverna visar på diagnosen inom områdena del av antal samt proportionalitet. Elevernas sammanlagda resultat i varje grupp presenteras i nedanstående tabell. Därefter redovisar vi hur elevparen hanterar elevuppgift 1 och visar valda delar av elevernas transkriberade samtal samt skärmbilder från den inspelade empirin för att klargöra resultatet. Detta fördelas på tre kategorier och dessa är kunskapande och användning, kontroll samt affekter.

Tabell 3 Elevparens sammanlagda resultat på de uppgifter i diagnosen som innehåller del av antal och bråk som proportion

Elevpar	D	A	F	E	B	C	G
Del av antal Maxpoäng 14	4	6	10	12	14	14	14
Bråk som proportion Maxpoäng 4	1	1	3	3	4	4	4

6.1.1.1 Kunskapande och användning – Metod och beräkning

Med utgångspunkt från hur elever löser uppgiften grupperar vi dem i tre olika nivåer där vi utgår ifrån hur deras metoder är anpassade till problemets karaktär. Vi tittar på elevernas sätt att angripa problemet, vilka strategier de använder samt om de använder någon beräkningsmetod och i så fall vilken. I nivå I ingår elevpar A, C och F som inte visar på någon fungerande metod eller beräkning. I nivå II ingår elevpar D och G som visar en fungerande metod och beräkning. Nivå III som består av elevpar B och E visar på en fungerande och utvecklad metod och beräkning.

Nivå I

Elevpar A (1) visar ingen fungerande matematisk metod eller beräkning. Vi upplever inte att eleverna till en början har någon strategi för hur de ska angripa uppgiften.

Sätter ut en punkt på skärmen. Flyttar runt den, ångrar.
- Har du några förslag?
- Hm

Tystnad
- Har du något förslag?
- Man ska ju räkna ut hälften här.

Rör musen över figuren.
- Men alltså en tredjedel

- Man måste ju veta hur stort rummet är också.

Ändrar i figuren, först större, sedan till en cm.

- Jag vet inte

Tystnad

- Hur går det för er? (frågar en annan grupp)

Tystnad, lite mummel i mun på varandra.

- **Är ni färdiga?**
- Det är en lite svår uppgift.

Därefter försöker de hitta svaret på Google vilket inte leder till att de kan lösa uppgiften.

Elevpar C (3) prövar flera olika strategier. De visar ingen fungerande matematisk metod eller beräkning.

Eleverna utgår ifrån en hypotes om helheten som ej fungerar.

- Kan man inte tänka att det är 100 bollar då?
- Då är det ju 50 bollar, 33 basketbollar och 22 st innebandybollar.

Därefter påbörjar de en lösning där de utgår ifrån figuren som de ej slutför.

- Om det är 1000 bollar.

*Ändrar figuren till 5*6*

- Det är inte 1000 bollar

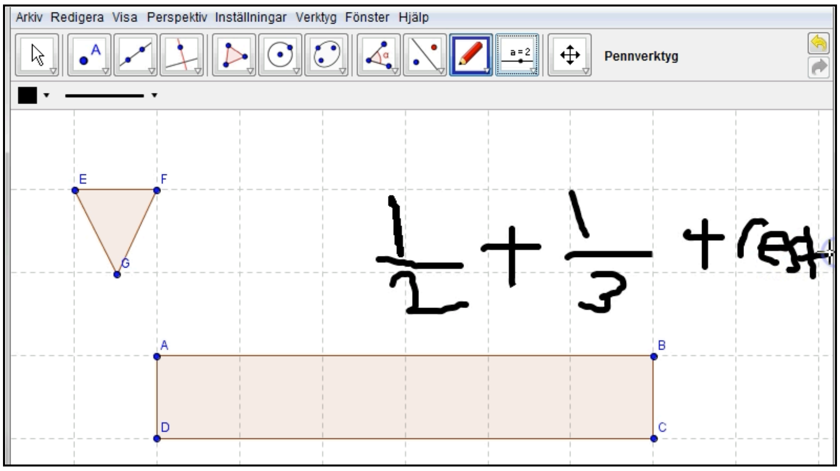
*Räknar och kontrollerar antal rutor. Ändrar till 6*6.*

- Nu är den kvadratisk
- Hur många bollar är det nu?
- Nu är det 6*6 bollar. Det är 36 bollar.
- Och hälften av det är fotbollar
- Hälften Jag fattar inte
- Men det står ju det här, hälften av det är fotbollar
- Men jag fattar inte. Vem vet hur många bollar det är. Hur ska man veta det?

Som tredje försök omvandlar de bråktalen till decimaltal och ger ett uttryck med en variabel för summan av antalet bollar. Sedan går de inte vidare i sitt resonemang.

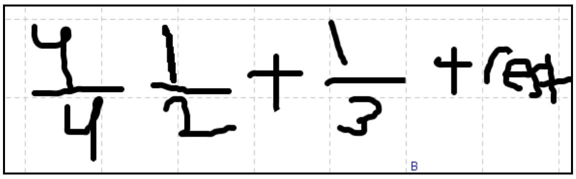
- X många bollar i bollförrådet. Vi vet ju inte hur många det är. Det finns hälften, det är ju 0,5X fotbollar. 0,33X basketbollar och 0,17X innebandybollar.

Elevpar F (2) påbörjar en lösning genom att ge ett uttryck där summan av delarna är lika med helheten.



- Vi säger det finns 20 bollar.
- Hälften är fotbollar.
- 10 är fotbollar. Basketbollar är ju… 5 och innebandybollar är 5.

Skriver 4/4 på skärmen.



De säger att de helst skulle vilja ha ett papper att rita på.

Nivå II

Eleverna i D (1) utgår från procentbegreppet men övergår sedan till att titta på figuren som består av sex rutor, använder hälften, tredjedel och sjättedel.

- Om det här är hälften av 6, då borde en tredjedel vara dom två. Då är det den som är kvar. Då är det den som är innebandybollar.

…

- Då är det 6 bollar.
- Tre fotbollar, två basketbollar och en innebandyboll.
- Ja, för hälften är tre om man tar bara i rutorna, sen är det två, tror jag att det blir. Då är det två basketbollar och en innebandyboll.
- En sjättedel är ju
- Innebandy.

I elevpar G (3) utgår eleverna från procentbegreppet men övergår till att ge ett uttryck där summan av delarna är lika med helheten. De räknar med tal i bråkform, förlänger och använder minsta gemensamma nämnare. På detta sätt löser de uppgiften.

- En halv plus en tredjedel blir ju… fem sjättedelar då. Sjättedelar kan jag göra om det till. Då blir det två sjättedelar plus tre sjättedelar.
- En sjättedel är…
- Innebandybollar. Jaha, så det finns en sjättedel innebandybollar i förrådet då.

Nivå III

Eleverna i B (3) och E (2) löser uppgiften på liknande sätt genom att använda figuren som består av sex rutor. De utgår från hälften och sedan tredjedelen. Därefter använder de multipeln sex för att hitta fler lösningar.

Elevpar B (3)

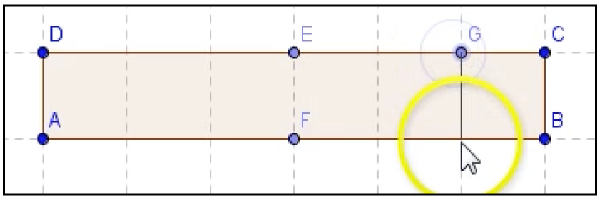
- Hur många bollar finns det? Vi har hälften bollar.

Visar hälften på figuren och sätter ut en linje.

- Sen har vi en tredjedel.

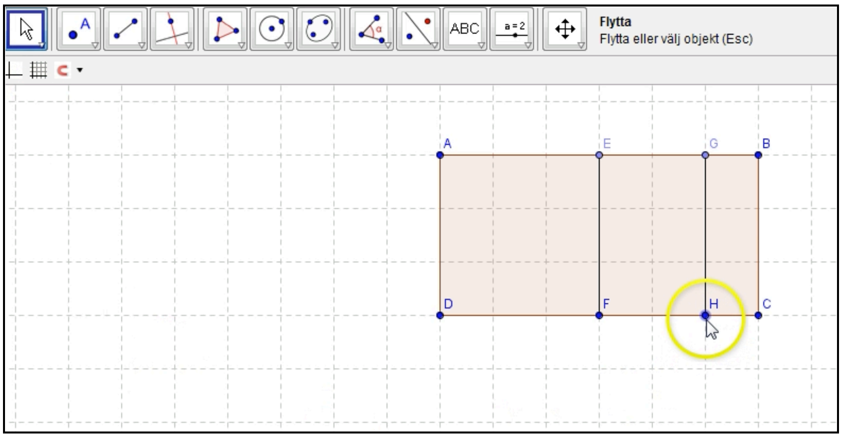
Sätter ut en linje två rutor bort.

- Då är det ju bara en kvar då.
- En, två.
- En sjättedel.
- Om ni vill veta hur många bollar det finns. Så säger vi om det finns sex bollar, så är tre fotbollar, två basketbollar och en innebandyboll.



- Vi tar tolv bollar.
- Så blir det sex bollar, fyra.
- Fyra och två.
- Precis så, man kan ju bara multiplicera det här.
- Så det finns ju hur många lösningar som helst.
- Ja beroende på hur många bollar det finns så finns det ju tjofräs.
- Ja vi kan ta ett exempel till, 18.
- Ja då blir det nio, sex och tre.

Elevpar E (2) visar här hur de använder figuren för att åskådliggöra proportionalitet.



6.1.1.2 Kunskapande och användning - Begrepp

Inspelningar och efterföljande transkriberingar visar de begrepp eleverna använder under problemlösningen. Dessa begrepp sammanställs och värderas efter hur utvecklad den visade begreppsuppfattningen är och på vilket sätt begreppen används. I nivå I ingår elevpar A, C och F som visar låg eller grundläggande begreppsuppfattning. I nivå II ingår elevpar D och G som visar god begreppsuppfattning. Nivå III som består av elevpar B och E visar på en mer utvecklad begreppsuppfattning.

Nivå I

A (1) Visar låg begreppsuppfattning.

F (2) Eleverna

- visar grundläggande begreppsuppfattning för hälften.

C (3) Eleverna

- visar en viss förståelse för omvandling mellan bråktal och decimaltal.
- visar grundläggande begreppsuppfattning för hälften.

Nivå II

D (1) Eleverna

- använder hälften, tredjedelen och sjättedelen och relaterar till helheten, i detta fall antalet bollar.
- visar bråk som del av antal genom att ange antalet bollar.

G (3) Eleverna

- använder sjättedelar och relaterar till helheten, i detta fall antalet bollar.
- visar bråk som del av antal genom att ange antalet bollar.

Nivå III

B (3) Eleverna

- använder hälften, tredjedelen och sjättedelen och relaterar till helheten, i detta fall antalet bollar.
- visar bråk som del av antal genom att ange antalet bollar.
- använder proportionalitet genom att multiplicera antalet bollar med 2 och 3.

E (2) Eleverna

- använder hälften, tredjedelen och en rest och relaterar till helheten, i detta fall antalet bollar.
- visar bråk som del av antal genom att ange antalet bollar.
- använder proportionalitet genom att multiplicera antalet bollar med 2, 3, 4, och 5.

6.1.1.3 Kunskapande och användning - Resonemang och kommunikation

Inspelningar och efterföljande transkriberingar visar det resonemang och den kommunikation eleverna använder under problemlösningen. Dessa sammanställs och värderas efter hur de resonerar och kommunicerar. I nivå I ingår elevpar A (1) som visar på ett kortfattat resonemang. I nivå II ingår B (3) och E (2) där det är en elev som styr samtalet. Nivå III som består av elevpar C (3), D (1), F (2) och G (3) visar på en mer utvecklad begreppsuppfattning.

Nivå I
Elevpar A (1) visar på ett kortfattat resonemang med varandra. När den ena eleven lyfter en idé om hur uppgiften kan angripas anser vi oss inte kunna uppfatta att den andre eleven ger någon respons.

Nivå II
B (3) och E (2) använder figuren som uttrycksform när de resonerar och att summan av delarna stämmer med helheten. I elevpar B upplevs det att den ena eleven ges möjlighet att styra resonemanget och i elevpar E menar vi att den ena eleven framträder starkast med att hitta en lösning på uppgiften.

Nivå III
C (3) och F (2) redogör för sitt tillvägagångssätt. I båda paren är eleverna aktiva och resonerar tillsammans kring olika förslag på att lösa uppgiften. G (3) redogör för sitt tillvägagångssätt och använder vid kommunikationen ett matematiskt språk. I gruppen är båda aktiva och resonerar tillsammans. D (1) använder figuren som uttrycksform och att summan av delarna stämmer med helheten. I elevpar D är båda aktiva och resonerar tillsammans.

6.1.1.4 Analys av uppgift 1

Elevpar A (1) visar liknande kunskaper som på diagnosen. De visar svårigheter både med begreppsuppfattning, resonemang, kommunikation och med strategier vid problemlösning.

Elevpar som vi uppfattar inte visar liknande kunskaper som på diagnosen är C (3), F (2) och G (3). Elevpar C byter lösningsstrategier utan att fullfölja någon av dem och använder endast begreppet hälften. F (2) visar ingen förståelse för tredjedel och sjättedel. Både elevpar C och F visar förmåga att föra och följa resonemang. Elevpar G som visar förståelse för bråk som proportion på diagnosen visar inte detta i problemlösningssituationen. De visar förmåga att föra och följa resonemang samt använder matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för beräkning och sin slutsats.

Elevpar D (1) och E (2) uppfattar vi visar en mer utvecklad kunskap än på diagnosen. Elevpar D löser uppgiften genom att titta på figuren och likställer antalet bollar med antalet rutor. De använder begreppen hälften, tredjedel samt sjättedel och dessa kunskaper visar de inte i diagnosen. Eleverna visar förmåga att föra och följa resonemang samt använder matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för sin slutsats. Elevpar E förstorar figuren för att få fler rutor och kan då se hur antalet bollar ökar proportionellt. B (3) befinner sig på förväntat resultat med hänsyn till visade förkunskaper på diagnosen. I elevpar B och E styrs resonemanget av den ena eleven i paret. Det visas förmåga att föra och följa resonemang samt används matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för beräkning och sin slutsats.

Elevpar A, C och F löste inte uppgiften korrekt. Elevpar C påbörjade en lösning genom att försöka använda figuren. Elevpar B, D, E och G löste uppgiften korrekt och elevpar D, B och E tog hjälp av figuren.

6.1.2 Elevuppgift 2

Elevuppgift 2 visar hur eleverna hanterar del av en helhet samt storleksordnar bråk. Först redovisar vi de förkunskaper som eleverna visar på diagnosen inom områdena del av en helhet samt storleksordna tal i bråkform. Varje elevpars sammanlagda resultat presenteras i nedanstående tabell. Därefter redovisar vi hur paren hanterar elevuppgift 2 och visar valda delar av elevernas transkriberade samtal samt skärmbilder från den inspelade empirin för att klargöra resultatet. Detta fördelas på tre kategorier och dessa är kunskapande och användning, kontroll samt attityd.

Tabell 4 Elevparens sammanlagda resultat på de uppgifter i diagnosen som innehåller del av en helhet och storleksordning av bråk

Elevpar	A	D	E	F	B	C	G
Del av en helhet Maxpoäng 20	12	7	13	11	18	16	19
Storleksordna bråk Maxpoäng 14	8	8	13	14	14	14	14

6.1.2.1 Kunskapande och användning – Metod och beräkning

Med utgångspunkt från hur eleverna löser elevuppgift 2 ordnar vi dem i tre nivåer där vi utgår ifrån hur deras metoder är anpassade till problemets karaktär. Vi tittar på elevernas sätt att angripa problemet, vilka strategier de använder samt om använder någon beräkningsmetod och i så fall vilken. I nivå I ingår elevpar A, D, F och G som inte visar på någon fungerande matematisk metod eller beräkning. I nivå II ingår elevpar C och E som visar en fungerande matematisk metod och beräkning. Nivå III som består av elevpar B visar på en fungerande och matematiskt utvecklad metod och beräkning.

Nivå I

Elevpar A (1) visar ingen fungerande metod eller beräkning. Vi anser oss kunna se att eleverna har en strategi för hur de ska angripa uppgiften då de jämför en tredjedel med två femtedelar, utgår från samma helhet, och använder figurerna som stöd.

- Här är ju Peters gräsmatta.

Visar på den nedre figuren.
- Och här är Malins gräsmatta.

Visar på den övre figuren.
- Så om han klipper två femtedelar.

Visar två femtedelar på den nedre figuren.
- Och hon har klippt en tredjedel av sin.

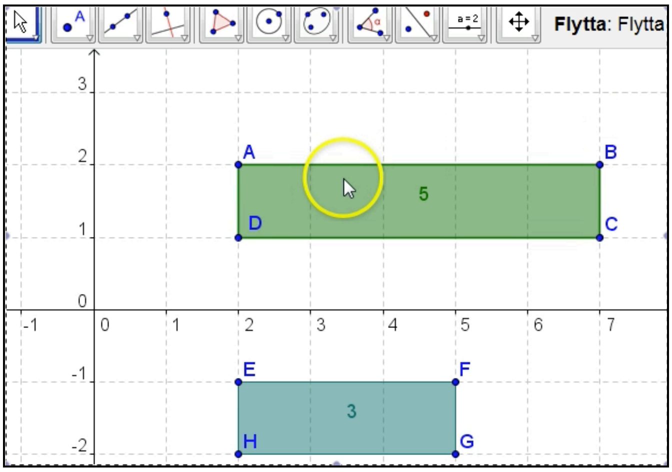
…
- Dom började ju klippa samtidigt.
- Ja
- Då blir de ju så om hon har klippt en tredjedel och han har klippt två femtedelar.

…
- Hon har klippt på samma tid så hon har mindre då. Så då är det Peter. Peters gräsmatta är störst.

Eleverna i D (1) visar ingen fungerande metod eller beräkning. De utgår från samma helhet och gör om bråktalen till procent och jämför dessa.

- Man kan ju kolla i procent. Där är Peters störst.

De ändrar den nedre rektangeln till 1x3 rutor och den övre till 1x5 rutor.
- Men kolla här, man kan ju kolla i procent. En tredjedel är ju 33 och två femtedelar är ju 40 procent och då har ju Peter störst.
- Nu är vi klara.



Elevpar F (2) visar ingen fungerande metod eller beräkning. Vi anser oss kunna se att eleverna har en strategi för hur de ska angripa uppgiften då de jämför en tredjedel med två femtedelar och utgår från samma helhet.

- Peters gräsmatta är större än Malins, har vi kommit fram till. Malin har klippt en tredjedel av gräsmattan och Peter har klippt två femtedelar av sin gräsmatta. Alltså har Peter större gräsmatta.

I G (3) visar eleverna ingen fungerande metod eller beräkning. De påbörjar en lösning genom att förlänga två femtedelar till sex femtondelar och vi anser oss kunna se att de är medvetna om att de ska utgår från olika helheter. Eleverna läser fel i uppgiften och får därför fel ingångsvärde vilket medför ett korrekt svar även om de löser uppgiften felaktigt.

- Han klipper en tredjedel av sin gräsmatta hon två femtedelar av sin.
- Okej, vi utgår från att de klipper lika mycket lika fort.
- Aa, exakt lika fort måste de klippa då. Så då....han har klippt en tredjedel av sin gräsmatta
- Hon har klippt två femtedelar.
- Då har de klippt lika mycket så kan vi så här.. eller vad heter det... förenkla det. Va e de? 15 e väl närmast då? Så blir det ju sex femtedelar sex femtondelar. Så då har Peter klippt mest. Nä, Malin har klippt … minst. Ja, Peter har klippt mest. Peter har störst gräsmatta.
- Hon har klippt två femtedelar Då har han klippt sex. Nä Malin har störst gräsmatta. Hon har mest kvar.

Nivå II

Elevpar C (3) visar en fungerande metod eller beräkning. De använder figurerna för illustrera att de olika delarna är lika stora och visar också att helheterna är olika stora.

- Om det här är hennes

Visar den översta på bilden med pilen.
- Då har hon klippt en tredjedel.

Visar på tredjedelen på den översta figuren
- Han har klippt två femtedelar. Det ska va lika mycket.
- Men kan vi inte ändra den då.

För ner pilen till den nedre figuren.
- Vi tar sex tycker jag.

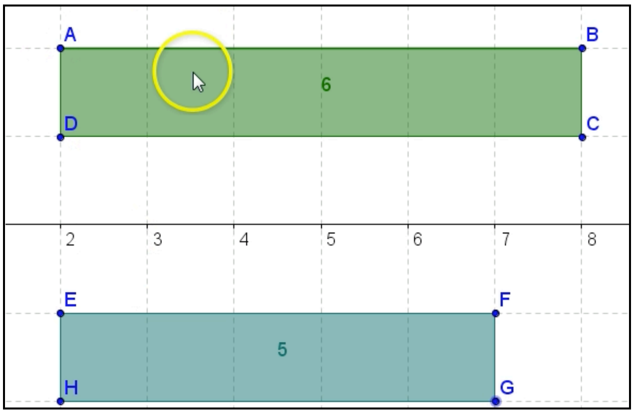
Ändrar den översta figuren till sex rutor.
- Men hallå om det är hennes och hon klipper en tredjedel.
- Ja då har hon klippt två rutor. Han har klippt lika mycket och det är två femtedelar.

Ändrar till fem rutor.
- Hon har klippt en tredjedel och det är två rutor.
- Hon har ju större då.
- Hon har klippt en tredjedel och det är två rutor.

Visar på bilden.
- Han har klippt två femtedelar.

Visar på bilden.
- Då har ju hon större.
- Och det var det som var frågan.

Eleverna använder figuren för att illustrera att två femtedelar är lika med två rutor av fem och att en tredjedel är två rutor av sex. De ser på skärmen att Malins gräsmatta är större.



Vi anser oss kunna se att elevpar E (2) är medvetna om att det är olika helheter och provar sig fram genom att ändra storleken på figurerna. Därefter använder de figuren och GeoGebras verktyg för att illustrera att delarna är lika stora och att helheterna är olika stora.

- Här är liksom, hon har en till tredjedel.

I den övre rektangeln som består av två rutor ritar eleven två rutor till.
Här är en till tredjedel. Också har hon en till tredjedel, som är här.
Ritar ytterligare två rutor så att den övre rektangeln nu är 6 rutor.
Här är hennes tredjedelar. Så får vi gå till den här.
Eleven flyttar markören till den nedre figuren.
Här är en femtedel.
Minskar den nedre rektangeln till 1 ruta.

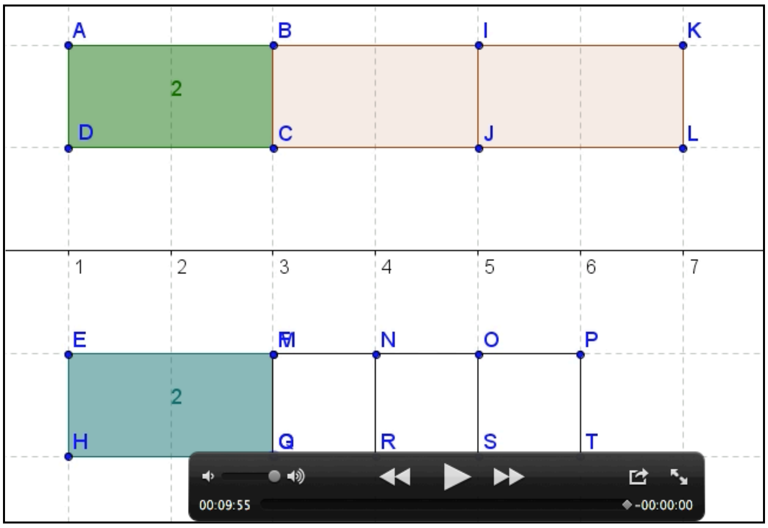
- Också får du göra 4 sådana.
- Ja

Ritar så att den nedre rektangeln blir 5 rutor.

- Jag vill bara visa att det är så mycket han har klippt.

Förstorar den första rutan i den nedre figuren till två rutor, så att den blir lika stor som en tredjedel i den övre figuren
Han har klippt så mycket. Där är två femtedelar.
Pekar på den förstorade rutan.

- Ja, ja
- Och där är en tredjedel. Vem har då störst? Jo, hon har störst.
- Ja, det är väl klart.
- Ja.
- Malin har störst gräsmatta.



Nivå III

Eleverna i B (3) visar på en fungerande och utvecklad matematiskt metod och beräkning där de utgår från två olika helheter. Eleverna räknar med tal i bråkform och förlänger till femtondelar. De använder inte figurerna som stöd.

- De måste alltså klippa lika fort för att det här ska stämma.
- Men i ”sånna” fall har Malin en tredjedel alltså två sjättedelar
- Mm
- Och det är mer än
- De har alltså klippt lika mycket.

- Först och främst ska vi göra de till samma enhet och då har vi då två femtedelar. Hur ska vi få det till samma enhet som..
- tredjedel..15
- Då är det ju 15. Då gångrar vi en tredjedel det blir fem femtondelar
- Fem femtondelar
- och det blir ju sex ... femtondelar totalt.. så har Peter större ääh mindre gräsmatta.
- Ja
- Så han har hunnit klippa mer, så han har klippt störst del.

6.1.2.2 Kunskapande och användning - Begrepp

Inspelningar och efterföljande transkriberingar visar de begrepp eleverna använder under problemlösningen. Dessa begrepp sammanställs och värderas efter hur utvecklad den visade begreppsuppfattningen är och på vilket sätt begreppen används. I nivå I ingår elevpar A, D och F som visar grundläggande begreppsuppfattning. I grupp II ingår elevpar D och G som visar god begreppsuppfattning. Grupp III som består av elevpar B och E visar på en mer utvecklad begreppsuppfattning.

Nivå I
A Eleverna
- visar grundläggande begreppsuppfattning för en tredjedel och två femtedelar.

D Eleverna
- visar grundläggande begreppsuppfattning för procent.

F Eleverna
- visar grundläggande begreppsuppfattning för en tredjedel och två femtedelar.

Nivå 2
C Eleverna
- visar begreppsuppfattning för en tredjedel och två femtedelar.
- visar bråk som del av en helhethet då helheterna är olika.

E Eleverna
- visar begreppsuppfattning för en tredjedel och två femtedelar.
- visar bråk som del av en helhethet då helheterna är olika.

G Eleverna
- visar begreppsuppfattning för en tredjedel och två femtedelar.
- visar bråk som del av en helhethet då helheterna är olika.

Nivå 3
B Eleverna
- visar begreppsuppfattning för en tredjedel och två femtedelar.
- visar bråk som del av en helhethet då helheterna är olika.
- använder femtondelar för att visa att Peter har klippt störst andel

6.1.2.3 Kunskapande och användning - Resonemang och kommunikation

Nivå 1
Elevpar A (1) visar på ett kortfattat resonemang och kommunikation.

Elevpar D (1) visar på ett kortfattat resonemang och kommunikation där det enbart är en elev som pratar. Den inspelade empirin är mycket kort.

Elevpar F (2) visar på ett kortfattat resonemang och kommunikation där det enbart är en elev som pratar. Den inspelade empirin är mycket kort.

Nivå II

Elevpar B (3) visar på ett kortfattat resonemang och kommunikation där den ena eleven styr samtalet.

I G (3) är eleverna aktiva och resonerar tillsammans. Eleverna påbörjar en kommunikation som inte fullföljs på ett korrekt sätt.

Nivå III

Elevpar C (3) och E (2) redogör för sitt tillvägagångssätt. I båda paren är eleverna aktiva och resonerar tillsammans kring hur de ska lösa uppgiften. De använder figuren som uttrycksform i sin kommunikation.

6.1.2.4 Analys av uppgift 2

Elevpar A (1) och D (1) visar på liknande kunskaper som på diagnosen där de visar kunskap på del av en helhet vid enklare figurer och visar på kunskap att parvis jämföra två tal. I uppgift 2 anser vi oss kunna se att de visar grundläggande förståelse för del av en helhet men eleverna ser ej att de ska utgå ifrån olika helheter. Inom området del av en helhet och storleksordna bråk visar eleverna ofullständig begreppsuppfattning, resonemang, kommunikation och visar få strategier vid problemlösning. E (2) visar i diagnosen kunskap på del av en helhet vid enklare figurer och B (3) visar på kunskap om del av en helhet vid olika figurer. Båda paren visar på kunskap om att parvis jämföra två bråktal där de ser att ett bråktal kan skrivas på flera olika sätt. Elevpar E visar förståelse för del av en helhet och ser att de ska utgå ifrån olika helheter. Eleverna är aktiva och resonerar tillsammans. De använder figuren som uttrycksform i sin kommunikation. Elevpar B visar förståelse för del av en helhet och ser att de ska utgå ifrån olika helheter. Resonemanget styrs av den ena eleven i paret. Denna elev använder en beräkningsmetod där bråktalen förlängs till minsta gemensamma nämnare.

De som vi uppfattar inte visar liknande kunskaper som på diagnosen är elevpar C (3), F (2) och G (3). Elevpar F visar på diagnosen kunskap om del av en helhet vid enklare figurer och elevpar G visar på kunskap om del av en helhet vid olika figurer. Båda paren visar på kunskap om att parvis jämföra två bråktal där de ser att ett bråktal kan skrivas på flera olika sätt. I uppgift 2 anser vi oss kunna se att F visar grundläggande förståelse för del av en helhet men eleverna ser ej att de ska utgå ifrån olika helheter. Inom området del av en helhet och storleksordna bråk visar elevpar F ofullständig begreppsuppfattning, resonemang, kommunikation och visar få strategier vid problemlösning. Elevpar G visar förståelse för del av en helhet och ser att de ska utgå ifrån olika helheter. Eleverna är aktiva och resonerar tillsammans. Elevpar G påbörjar en kommunikation och vi anser oss kunna se genom elevernas resonemang att de snabbt vill bli klara och därför läser fel i uppgiften, förklarar kortfattat och ofullständigt för varandra och detta gör att det blir missuppfattningar. Elevpar C visar på diagnosen viss kunskap om del av en helhet vid olika figurer. Den ena eleven får felaktigt svar på att självständigt skugga flera delar av en hel eftersom en tredjedel skuggas i stället för två tredjedelar. Eleverna visar på kunskap om att parvis jämföra två bråktal där de ser att ett bråktal kan skrivas på flera olika sätt. Elevpar C visar förståelse för del av en helhet och ser att de ska utgå ifrån olika helheter. Eleverna är aktiva och resonerar tillsammans. De använder figuren som uttrycksform i sin kommunikation.

Elevpar A, D, F och G löser inte uppgiften korrekt där A, D och F påbörjar en lösning genom att jämföra en tredjedel med två femtedelar men utgår inte från olika helheter. Elevpar G påbörjar en lösning genom att utgå från olika helheter där delarna inte är korrekta. Elevpar B, C och E löser uppgiften korrekt och C och E tar hjälp av figuren.

6.1.3 Kontroll – Elevuppgift 1 och 2

I elevpar A (1) ser vi inte att de visar hur de skulle kunna angripa problemet.

I elevpar B (3), D (1), F (2) och G (3) anser vi oss se att eleverna har bråttom vid problemlösandet och verkar inte inse vikten av att i lugn och ro strukturera sina tankegångar. Vi uppfattar inte att de reflekterar över om de tänkt rätt.

I uppgift 1 påbörjar elevpar C (3) en ny lösningsstrategi innan de slutfört och utvärderat den tidigare. I uppgift 2 använder de figurerna som stöd och verkar därmed få struktur i problemlösandet.

Elevpar E (2) uppfattar vi går lugnt och metodiskt till väga och reflekterar tillsammans över om de tänker rätt.

6.1.4 Affekter – Elevuppgift 1 och 2

Vi anser att elevpar A (1) visar motivation men inte tilltro till sin förmåga att lösa uppgifterna.

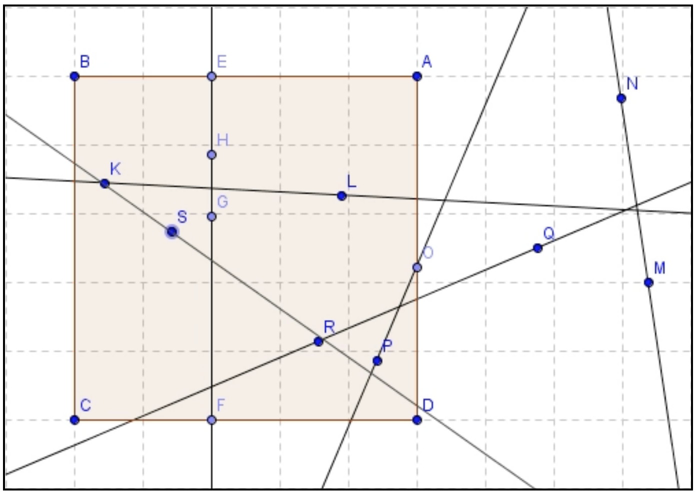
- **Är ni färdiga?**
- Det är en lite svår uppgift.
- Nej, vi försöker lösa den här matematikuppgiften.

…

- Det blir nog roligt att sitta och lyssna på det här sen.
- Mmm.
- Jag ger upp.

Till en början menar vi att elevpar C (3) visar motivation till att lösa uppgift 1 men den upplevs avta när de inte verkar veta hur de ska gå vidare. Eleverna provar flera olika metoder. I uppgift 2 visar de motivation till att hitta en lösning.

Uppgift 1



Vi anser att elevpar D (1) visar motivation men inte tilltro till sin förmåga att lösa uppgifterna.

- Jag vet inte ens hur man ska lösa den. Känner mig så där jättedålig.

…

- Vi ger upp.
- Men vad ska de säga då?
- Ska vi typ ta och fråga om man inte vet hur man ska lösa det?

Eleverna löser sedan uppgift 1 korrekt genom att använda figuren.

Vi upplever att elevpar G (3) verkar tycka att en snabb lösning är lika med en bra lösning.

- Yes
- Ja!
- Färdiga.

Vi anser att elevpar E (2) visar motivation och tilltro till sin förmåga att lösa uppgifterna.

Vi anser att elevpar B (3) visar motivation och tilltro till sin förmåga att lösa uppgifterna.

- Då vet vi allting och det här programmet hjälpte ingenting för våra hjärnor är för smarta.

…

- Så vi behöver inte det här programmet heller för vi är så smarta.

Vi ser på empirin att eleverna använt figuren i uppgift 1.

I Elevpar F (2) anser vi oss ha svårt att tolka affekter från inspelat material.

6.2 Sammanfattande kommentarer och analys

Denna slutliga analys kombineras med de två delanalyserna för att skapa en rik, beskrivande berättelse om hur eleverna i årskurs 8 hanterar tal i bråkform. Relevanta mönster av hur elever löser uppgifter om del av en helhet och del av antal har noterats efter att transkriberingar gjorts av inspelad empiri där även deras samtal har analyserats. Litteratur har spelat en viktig roll för att stödja tolkningen av data. Följande steg har använts vid analysen av empirin: (a) kodning av varje elevpars samtal och lösningsmetoder, (b) från kodningen uppenbarades nivåer och (c) kategorierna organiserades efter Lester (1996) med stöd av Skolverket (2011c). Målsättningen har varit att skapa en fördjupad förståelse av hur eleverna hanterar tal i bråkform när de i par fick möjlighet att använda datorprogrammet GeoGebra för att få en visuell dynamisk representationsform. Denna studie testar inte en väldefinierad teori, men försöker att komplettera de kunskaper som finns inom detta område. Ett antagande har varit att eleverna skulle lösa elevuppgifterna efter bästa förmåga och att empirin skulle ge oss information för att besvara syftets frågeställningar.

Elevernas förkunskaper, i diagnosen på uppgifter om del av en helhet, visar att flera elever inte delar figurerna i lika stora delar. Detta visar sig även när eleverna ringar in figurer där en tredjedel är skuggad. Vi tolkar detta resultat som att dessa elever inte förstår nämnarens innebörd som enligt Löwing (2008) är ett grundläggande begrepp som bör behärskas för att kunna operera med tal i bråkform. När eleverna skuggar del av ett antal, där antalen är ritade som bollar, är det en elev som visar svårigheter. I en liknande uppgift som också behandlar del av antal men utan visuellt stöd, är det fler elever som inte visar dessa kunskaper. Vi anser oss kunna se att eleverna lättare löser uppgifter när de har tillgång till en visuell representationsform. När eleverna skuggar två tredjedelar av en figur är det några som istället skuggar en tredjedel. Vi uppfattar även att elever använder fel ingångsvärde och inte använder begrepp på ett korrekt sätt. Detta kan bero på, anser vi, att de inte har förståelse för begrepp de använder eller att de inte uppmärksammar information korrekt i uppgiften. De elever som visar svårigheter inom tal i bråkform använder få begrepp i sin kommunikation. På diagnosen visar de flesta par på förkunskaper om bråk som proportion. Två par visar dessa kunskaper i elevuppgift 1 och vi ser att de andra paren anser sig klara när de ger en lösning och inte flera som efterfrågas. I elevuppgift 1 anser vi oss se att flera par uppfattar det som en svårighet att inte ha ett antal att utgå ifrån. Detta kan bero på att eleverna inte är vana att hantera uppgifter där de inte kan utgå från en beräkningsstrategi. En svårighet som flera par visar, i elevuppgift 2, är att de ska utgå ifrån två olika helheter. Vi ser att dessa elever i stället jämför delarna med varandra.

Flera elever uttrycker att de inte vet varför de ska använda datorn och att de inte tidigare har använt datorn som ett verktyg i matematikundervisningen. Även om de inte använder datorn där ser vi att de har en vana vid att hantera datorn och att flera par använder GeoGebras verktyg för att själva komplettera i figuren. Vi anser oss kunna se att några par har som målsättning att kunna lösa uppgifterna utan att använda datorn. De verkar tycka att det visar på en mer utvecklad strategi att inte använda datorn. Två par som visar låga förkunskaper på diagnosen löser elevuppgifter genom att använda den visuella representationsform som datorn ger. De använder representationsformen som stöd i sitt resonemang genom att till exempel titta på figuren, ändra storlek eller rita i figuren för att prova sig fram och samtidigt argumenterar de för olika lösningsmetoder.

I elevernas svar i diagnosen ser vi att uppgift 7, 8 och 13, som behandlar problemlösning, upplevs svåra av eleverna. Eleverna som försöker lösa eller löser uppgifterna använder i de allra flesta fall en beräkningsstrategi. Några elever försöker använda en visuell representationsform. De elever som på diagnosen visar på störst svårigheter inom tal i bråkform löser inte där någon av de uppgifter som behandlar problemlösning. Vi ser att ett av dessa par löser elevuppgift 1 med stöd av den visuella representationsform som datorn erbjuder. I elevuppgift

2 använder de elever som visar störst svårigheter figurerna och jämför dessa utan att ta hänsyn till meningen ”De har då klippt lika mycket” vilket medför att de då inte har förutsättning att lösa uppgiften. Det vi anser oss kunna se i elevuppgifterna är att flera elevpar inte tar sig tid att förstå problemen utan använder direkt en beräkningsstrategi och de visar inte att de funderar över svarets rimlighet.

Vi ser elevpar som resonerar och utmanar varandras tankar vilket gör att problemlösningsprocessen drivs framåt. I andra par uppfattar vi att det är en av eleverna som styr samtalet. De par som visar låga förkunskaper på diagnoser använder i elevuppgift 1 olika sätt att kommunicera. I det ena paret uttrycker eleverna olika idéer om hur uppgiften skulle kunna angripas. De ger inte varandra respons på dessa idéer utan svarar med tystnad vilket vi anser oss kunna se leder till att de inte kommer vidare i problemlösningen. I elevuppgift 2 visar de samma kommunikationsmönster. I det andra paret ser vi i elevuppgift 1 att eleverna uttalar flera idéer som de gemensamt prövar genom att ge respons och som de resonerar tillsammans kring vilket leder till att de kommer fram till ett svar. När paret får uppgift 2 ger den ena eleven idé som de använder utan att resonera om metodens orimlighet. Vi anser oss kunna se att kommunikationen påverkas av uppgifternas svårighetsgrad i förhållande till elevernas förkunskaper.

7. Diskussion

7.1 Metodreflektion

Eftersom vi utgår från ett relationellt perspektiv har vi funderat på vilka konsekvenser vårt urvalsinstrument, där vi använder en diagnos, haft för denna studie. En konsekvens som vi ser är att inte alla aspekter av elevers kunskaper synliggörs. Vi är medvetna om att en diagnos fokuserar på individen som bärare av sina svårigheter och inte på att elevens svårigheter uppstår i mötet med miljön. Vi valde ändå att använda en diagnos eftersom den tid som fanns till förfogande inte gjorde det möjligt att samtala med varje elev för att få information om deras förkunskaper inom det valda matematikområdet.

Att använda fallstudie som metod har möjliggjort att vi har kunnat ta del av en empiri som ger oss värdefulla och för oss unika kunskaper genom att vi i detalj studerat hur elever hanterar tal i bråkform. När eleverna använder ett skärminspelningsprogram och arbetar i par har vi fått möjlighet att ta del av deras resonemang och uttalade uppfattningar när de löser matematiska problem samtidigt som vi ser hur elever använder en visuell dynamisk representationsform. Denna metod har gjort att vi kunnat göra en omfattande beskrivning av en komplex situation som påverkas av många parametrar. Vi har kunnat följa elevernas hela process vid problemlösning som startar med hur de angriper ett problem, hur de resonerar om olika metoder samt höra deras känsloyttringar när de stöter på motstånd eller lyckas komma på en fungerande lösning. Även Ollerton och Watson (2001, s. 29) beskriver fördelar med att lyssna på elever som arbetar tillsammans.

> It is much more instructive to listen to students trying to explain their mathematics to one another and to ourselves. In that kind of situation you can sometimes hear real struggles to make sense of symbols and get underneath them to the structure of what is happening /.../ Teachers might then overhear some very comments between students, such as: But what do you men? But why have you done that? But where did this measurement come from?

Vår metod i studien har gett oss en stor empiri där svårigheten har varit att sortera ut och kategorisera för oss viktig information. För att hantera detta har vi upprepade gånger granskat empirin och gått från ett övergripande perspektiv till att mer och mer detaljerat synliggöra delarna. Arbetssättet har varit mycket tidskrävande och i efterhand har vi funderat på om det inte skulle ha varit tillräckligt med en elevuppgift istället för två inom tidsramen för detta arbete. Vi har funderat på om elevernas möjligheter till en mer aktiv och lärande kommunikation hade varit större om vi hade intagit en annan roll. Vi valde att enbart stötta eleverna med det tekniska handhavandet och att vid frågor uppmuntra dem att läsa uppgiften igen och att se om de kunde använda den visuella representationsformen som stöd. En annan möjlighet skulle vara att ta en mer aktiv roll i elevernas diskussioner. Anledningen till att vi valde den mer passiva rollen var att vi inte ville påverka empirin mer än nödvändigt.

7.1.1 Resultatets tillförlitlighet

7.1.1.1 Validitet

I studien finns det flera olika faktorer som påverkar om det som avsågs att studeras faktiskt studerades. Ett urval är alltid selektivt och Ahlberg (2001) framhåller att man måste vara medveten om vad tester mäter och inte mäter. I och med att vi valde en diagnos kan det ha funnits elever som hade mer utvecklade kunskaper som de inte hade möjlighet att visa. En annan faktor är om uppgifterna som skulle lösas med stöd av datorn var konstruerade för att låta eleverna visa sin faktiska kunskap och förståelse. Denscombe (2009) belyser att validitet avser till hur stor del kvalitativa studier kan visa att deras data är exakta och träffsäkra. Vi anser att empirin är omfattande vilket gjort att vi kunnat få svar på våra frågeställningar. Samtidigt är vi medvetna om att med en riklig empiri hade möjligen en annan forskare fokuserat på andra delar som hade kunnat påverka resultatet. För att denna studie ska kunna granskas har vi valt att bifoga resultatet från diagnosen eftersom studien bygger på en jämförelse mellan diagnosen och empirin. Vi anser att det ökar trovärdigheten i vårt arbete.

7.1.1.2 Reliabilitet

I denna studie har vi försökt att tydligt och detaljerat beskriva tillvägagångssätt och miljön där fältstudien gjordes. Detta möjliggör en upprepning av studien för att få ett större underlag att analysera och därmed kunna göra en eventuell generalisering av resultatet. Vi menar att vår undersökning kan upprepas men resultatet kommer med största sannolikhet inte vara det samma på grund av liten urvalsgrupp och den specifika kontexten. Merriam (1994) menar att inom pedagogiska områden sker det en ständig förändring som både är komplex och kontextberoende. Analysen som görs är beroende av de elever som bidrar med informationen och forskarens färdigheter. En upprepning av en kvalitativ undersökning kommer inte att ge samma resultat, men det innebär inte att den första undersökningen ska ifrågasättas eftersom flera tolkningar av samma händelse är möjlig. Något som hade stärkt studiens reliabilitet hade varit att räkna på interbedömarreliabiliteten. Då hade vi kunnat se den procentuella överensstämmelsen mellan hur vi har bedömt elevernas resultat på diagnosen och delat in eleverna i kunskapsnivåer i relation till hur någon annan oberoende person gjort bedömningen. Vi menar att resultaten inte är generaliserbara, men att studien visar på mönster som kan testas empiriskt i framtida studier.

7.2 Resultatdiskussion

7.2.1 Eleverna hanterar del av

Elevernas förkunskaper, som kommer fram på diagnosen, visar att flera elever inte verkar förstå del av en helhet eftersom vi ser att de delar figurer i olika stora delar. En viktig förkunskap för att lära sig förstå tal i bråkform är nämnarens betydelse och nämnaren anger hur många delar helheten är uppdelad i. Löwing (2008) menar att nämnarens innebörd är ett begrepp som eleverna behöver behärska för att kunna operera med bråktal. McIntosh (2009) belyser att i vardagslivet används tal i bråkform oftast i begränsad omfattning och vanligt förekommande är ”häften av” eller ”fjärdedelar av”. I diagnosen frågas även efter femtedelar och tredjedelar vilket skulle kunna vara begrepp som inte används i elevernas vardagsspråk och inte har konkretiserats tillräckligt för att eleverna ska få en förståelse för dessa begrepp. McIntosh beskriver också hur vi i vardagen när vi använder tal i bråkform inte menar exakta mått. I charkdisken säger vi till exempel ”ett halvt hekto salami” och vi får då ingen exakt vikt utan en ungefärlig. Vi menar att om elever i sin vardag inte uppfattar att delar ska vara lika stora för att vara bråkdelar gäller det att eleverna i skolan får den tid som krävs för att de ska kunna konkretisera denna grundläggande förståelsen för att i förlängningen kunna göra en abstraktion. Här ser vi att en vardagsanknuten undervisning har stor betydelse för elevernas förståelse. McIntosh menar att i ett bråkuttryck handlar det om delning i exakt lika stora delar och att detta är viktigt att uppmärksamma för eleverna. Vi ser att flera elever inte är medvetna om att i elevuppgift 2 utgår delarna från två olika helheter. Detta kan bero på att eleverna inte uppfattat den information som ges i texten eller att eleverna inte har den förkunskap som krävs för att använda denna information. Malmer (2002) menar att det är viktigt att låta eleverna upptäcka att storleken av en del är beroende av det helas storlek. Malmer menar också att det finns många olika sätt att illustrera tal i bråkform och det är viktigt att eleverna får möta och handskas med olika utseende på helheten. Här ser vi datorn som ett sätt att åskådliggöra tal i bråkform på ett sätt där elever kan ändra i figuren för att undersöka hur delen förhåller sig till helheten. När elever arbetar i par ger detta tillfälle till att resonera och argumentera för olika matematiska metoder. McIntosh menar att elever behöver många tillfällen att åskådliggöra och samtala om delar av olika helheter. Den metod som används i studien där elever tillsammans resonerar kring en visuell representationsform, menar vi, skulle kunna bidra till att elevers förståelse för del av ökar.

7.2.2 Elevernas begreppsuppfattning

I vår empiri ser vi att elever som visar svårigheter i diagnosen använder få begrepp eller inte använder begrepp på ett korrekt sätt när de arbetar med elevuppgifterna. Detta skulle kunna förstås som att eleverna inte har förståelse för de begrepp de använder. Malmer (2002) menar att det övergripande målet är att elever ska få kunskap om begrepp som grundar sig på förståelse och att detta måste ske innan de övergår till abstrakt symbolframställning. Vår erfarenhet som lärare är att elever ofta inte får den tid de behöver för att, genom konkret arbete, upptäcka samband som är nödvändiga för att kunna abstrahera matematiska begrepp. Sherman, Richardson och Yard (2009) framhåller att elever i matematiksvårigheter ofta får träna procedurräkning vilket inte är framgångsrikt på sikt och undervisningen bör fokusera på deras förståelse för grundläggande begrepp. Vi menar att när elever får arbeta med uppgifter där tyngdpunkten ligger på problemlösning i stället för aritmetik och eleverna samtidigt får tillgång till den visuella representationsform som GeoGebra kan ge skulle det kunna bidra till en ökad begreppsförståelse.

7.2.3 Elevernas metoder och beräkningar

Inför studien lät vi eleverna genomföra en diagnos inom området tal i bråkform för att se deras förkunskaper. I diagnosen ingick tre olika problemlösningsuppgifter. Det vi ser är att många elever har svårigheter med dessa uppgifter. När eleverna löser eller försöker lösa dem använder de oftast en beräkningsstrategi och endast ett par elever ritar en bild. I empiren kan vi se att många elever visar svårigheter och är frågande till att det inte finns ett antal att utgå ifrån i elevuppgift 1. Detta skulle kunna bero på att elever är vana vid att använda beräkningsstrategier där de utgår från ett tal. Lester (1996) lyfter fram att skälet till att många elever visar svårigheter vid problemlösning är att de endast får undervisning om en strategi – beräkningsstrategin. Ahlberg (2001); Magne (1998) m.fl. påpekar att elever måste få tillgång till olika strategier för att utveckla en god problemlösningsförmåga. Det vi anser oss kunna se utifrån vår empiri är att flera elever, varav de flesta av dem som visar svårigheter, är osäkra på hur de ska angripa de problem de ställdes inför. Det vi också ser är att flera elevpar använder kort tid till att förstå problemet och välja lösningsstrategi, de går därmed snabbt vidare till en beräkningsstrategi. Detta syns tydligast i elevuppgift 2 där eleverna jämför de två bråktalen med varandra. Ahlberg (2001) menar att skillnaden mellan elever som visar svårigheter vid problemlösning och goda problemlösare ligger just där, att elever som visar svårigheter fokuserar för lite på att förstå problemet och att välja lösningsstrategi. Detta kan tyda på att de inte har fått, under sina skolår, en systematisk undervisning i problemlösning vilket Lester (1996) betonar är viktigt för att bli en god problemlösare. Vår erfarenhet är att många lärare använder problemlösning som ett sätt att variera undervisningen för att göra något annat än att låta eleverna individuellt räkna i matematikboken. Betoning på arbetet med problemlösning ligger då på det lustfyllda och att låta eleverna arbeta tillsammans i par eller grupp. Här stöds våra erfarenheter av Hagland m.fl. (2005) som skriver: ”Vi tror att alla elever, ja faktiskt även lärare, behöver uppleva omväxling i undervisningen, ett varierande arbetssätt. Men det kanske inte alltid är så lätt för läraren att åstadkomma den här omväxlingen. Ett sätt skulle kunna vara att läraren låter sina elever lösa problem” (s. 7). Vi anser naturligtvis att problemlösning ska uppfattas av eleverna som kreativt och lustfyllt men lärare ska inte bortse ifrån att det är ett komplext område som kräver en strukturerad undervisning.

7.2.4 Elevernas kommunikation och resonemang

Empirin visar att elevernas resonemang och kommunikation ser olika ut i de olika elevparen. Vissa par resonerar tillsammans, i andra par är det en elev som styr och i några par visas svårigheter att få i gång ett resonemang. I det senare fallet anser vi att kan det finnas flera orsaker, dels språkliga svårigheter, dels att problemets svårighetsgrad kanske är för hög och kanske också att elever inte är vana vid att diskutera problemlösningsuppgifter av den sort vi gav dem. Ahlberg (2001) menar att för elever i behov av stöd är det viktigt att de får resonera och samtala om matematiska problem. Vi menar att empirin tyder på att elever behöver få möjlighet att träna på och att utveckla förmågan att föra och följa matematiska resonemang där matematikens uttrycksformer används. Detta stöds av Ollerton och Watson (2001) som påpekar att elever kan behöva hjälp att lära sig kommunicera och argumentera matematiskt. Empirin visar att elever använder fel ingångsvärde och inte uppmärksammar all information i elevuppgiften. Detta gäller främst de par som visar svårigheter vid diagnosen men även andra elevpar. Malmer (2002) framhåller att ofta förekommande bland elever i matematiksvårigheter är koncentrations- och perceptionssvårigheter vilket vi anser skulle kunna innebära att elever har svårigheter med att stänga ute irrelevant information och därmed kunna koncentrera sig på den text som finns i elevuppgifterna. Även Gersten och Clarke (2007b) diskuterar betydelsen av elevers impulsivitet och koncentrationsförmåga. En annan anledning till detta skulle kunna vara att elever inte tagit sig tid att noggrant läsa uppgiften vilket kan bero på att elever känner sig stressade av att hur de löser uppgiften spelas in. Det kan också bero på, som Magne (1998) poängterar, att elever behöver ha en allmän språklig grund för att kunna förstå problem vilket kanske en del elever saknar. En orsak skulle kunna vara andra språkliga svårigheter såsom dyslexi eller annat modersmål. Elevers språkliga förmågor kan vi inte uttala oss om eftersom vi inte undersökt dem i studien. Våra resultat tyder dock på att elever behöver stöd i att förstå och tolka information i textuppgifter. Detta framhåller även Ahlberg (2001) som menar att språket spelar en viktig roll när det gäller lärande i matematik och att elever har matematiksvårigheter kan bero på brister i den språkliga kommunikationen. Att språket har stor betydelse för elevers problemlösningsförmåga är Magne (1998) m.fl. överens om och att det i klassrum generellt läggs för lite tid på att utveckla elevernas språkliga och kommunikativa förmåga. Vår erfarenhet är att en stor del av undervisningstiden används till individuellt arbete i matematikboken.

7.2.5 Elevernas användning av datorn som verktyg

Vi ser i empirin att det finns elever som inte ger rätt svar på de diagnosuppgifter som mäter problemlösning, lättare löser uppgifter när de har tillgång till en visuell representationsform. Vi menar att när elever använder GeoGebra som ett stöd för att lösa matematiska problem bidrar detta till att eleverna kan få en tydlig struktur på uppgiften och en konkret figur att utgå från. Här anser vi att särskilt elever i matematiksvårigheter gynnas. Detta menar också Sterner och Lundberg (2009); Gersten och Clarke (2007a); Kilborn och Löwing (2002) och Malmer (2002) som påpekar att för elever i behov av särskilt stöd är visuella representationsformer och att dela sina tankar med en kamrat ett gynnsamt arbetssätt. Vår erfarenhet som lärare är att elever i de senare årskurserna inte gärna vill använda laborativt, konkret material. De uttrycker att det är barnsligt och något som används för mindre barn. Denna erfarenhet har även Malmer som menar att lärare upplever motstånd från elever eftersom konkret material förknippas med nybörjarundervisning och låg prestationsförmåga. Här ser vi en fördel med att använda datorn som verktyg för att arbeta laborativt och kunna konkretisera begrepp genom visuella representationsformer. Vi tror att datorn i undervisningen ökar elevernas motivation och ses av eleverna som ett positivt arbetssätt. Blomhöj (2001) har i sin undersökning funnit att elever tycker att datorn i sig har ett värde i undervisningen. Arbetssättet i studien där eleverna får resonera tillsammans och också använda en visuell och dynamisk representationsform i ett dataprogram borde på sikt stödja elevernas begreppsutveckling så att de kan utveckla mentala representationer vilket även Sterner och Lundberg (2009) menar är betydelsefullt.
Malmer påpekar att olika representationsformer bör användas i undervisningen där de kan få stöd att gå från det konkreta till det abstrakta. Vi menar att detta skulle kunna möjliggöra för elever i matematiksvårigheter att få använda sin kreativitet och kompetens inom andra områden som de behärskar bättre. Gustafsson m.fl. (2011) belyser att elever som ges möjlighet att använda flera olika representationsformer för att beskriva ett matematiskt begrepp får en djupare och mer användbar begreppskunskap.

7.2.6 Specialpedagogiska implikationer

Det är betydelsefullt att elevernas undervisning om tal i bråkform sker i ett kontinuerligt sammanhang genom hela grundskolan. McIntosh (2009) och Löwing (2008) påpekar att elever måste ges tillräcklig tid för att utveckla en god talförståelse. Malmer (2002) menar att elever som är i matematiksvårigheter ofta inte har fått denna tid. Genom regelbundna samtal med eleverna kan läraren säkerställa att eleverna förstått viktiga begrepp. Här ser vi även skärminspelningsprogrammens möjligheter som ett sätt för läraren att utvärdera elevernas förståelse och kunskapsutveckling. Eleverna kan spela in lösningar på matematiska problem som kan användas i klassrumsdiskussioner där elever och lärare samtalar om olika lösningars för och nackdelar. Läraren kan också spara dessa inspelningar för att få information om elevers matematikkunskaper som underlag vid planering av kommande lektioner.

I empirin ser vi att elever inte reflekterar över om svaret är rimligt och vi funderar på om det kan bero på att taluppfattningen inte är tillräckligt utvecklad**.** Löwing (2008) menar att elever behöver förståelse för grundläggande begrepp för att kunna resonera sig fram till rimliga lösningar på problem och se om lösningar kan vara rimliga. Clarke, Roche och Mitchell (2011) påpekar att undervisningen om tal i bråkform ofta handlar om beräkningar istället för att utveckla förmågan att förstå bråk. När digitala arbetsmetoder används flyttas fokus från reproduktion till nyskapande menar Kroksmark (2011). Detta arbetssätt anser vi gynnar alla elever men särskilt elever i matematiksvårigheter som ofta fastnar i procedurräkning och inte ges möjlighet att utforska matematiken som en kreativ aktivitet och fascineras av, som det uttrycks i kursplanen, matematikens estetiska värden.

Empirin har gett oss insikten om hur viktig läraren är för elevers lärande. Detta anser vi oss kunna uttyda i empirin genom att vi uppfattar det som om att elever saknar verktyg för hur de skall gå till väga i problemlösningssituationen. Lärarens betydelse för utvecklingen av elevers problemlösningsförmåga framhålls också av flera forskare där Lester (1996) menar att: ”I själva verket kan mycket få elever bli framgångsrika problemlösare utan lärares hjälp. Den enskilda, mest utmanande uppgiften för läraren är att besluta vilken typ av handledning som ska ges och när den ska ges” (s. 89). Vi menar att elever och då särskilt elever i matematiksvårigheter behöver få stöttning under hela problemlösningsprocessen, från att tolka och förstå uppgiften till att välja lösningsstrategi, utföra beräkning/strategi och att till sist reflektera över och kontrollera lösningen. Läraren behöver vara ett stöd för eleverna genom att förklara begrepp och tillsammans diskutera frågeställningar för att skapa en förförståelse. Lärarens uppgift under elevernas arbete med matematiska problem är att utmana elevernas tankar och få dem att reflektera samt ställa frågor så att de kommer vidare. Vi anser att för att ge elever fler strategier och se andra sätt att lösa problem är det även viktigt att gemensamt i klassen lyfta fram olika lösningar och tillsammans reflektera runt uppgifterna, vilket även poängteras av Lester (1996).

7.2.7 Framtida forskning

Empirin tyder på att när elever arbetar i par och resonerar med varandra med stöd av en dynamisk visuell representationsform bidrar det till att olika matematiska metoder vägs mot varandra och värderas efter om de bidrar till en lösning av uppgiften. Skolinspektionen (2009) har granskat skolors matematikundervisning och ser att jämfört med de tidigare årskurserna ökar procedurräkningen i de senare årskurserna på grundskolan vilket har lett till att förekomsten av elevers matematiska resonemang minskat. Skolinspektionen har vid granskningen också funnit att inte alla elever ges förutsättningar att utveckla förmågor som att uttrycka sig muntligt, se samband och resonera. En möjlig åtgärd skulle kunna vara att låta elever arbeta i par med datorn som verktyg för att utveckla dessa förmågor. Här anser vi att aktionsforskning skulle vara ett viktigt bidrag för att starta processer där forskare och lärare tillsammans arbetar fram ett arbetssätt som bättre utvecklar möjligheterna för elever i matematiksvårigheter att engagera sig i aktiviteter som inbjuder till resonemang och kommunikation för en bättre matematisk förståelse. Forskningen skulle då också kunna inriktas mot att eleverna utvecklar kunskaper i att använda digital teknik för att undersöka problemställningar vilket är ett syfte i kursplanen för matematik (Skolverket, 2011a). I kunskapskraven i matematik för årskurs 6 och 9 (Skolverket, 2011a) betonas förmågan att föra och följa matematiska resonemang. Denna förmåga kan för lärare vara svår att bedöma och dokumentera för att därefter diskutera med eleven och göra honom/henne medveten om sin egen kunskapsutveckling. I bedömning för lärande ser vi här en möjlighet att använda ett skärminspelningsprogram som Screencast-O-Matic och att det är ett område som behöver forskas vidare om. En mer omfattande studie än vår där också lärare görs mer aktiva och delaktiga skulle kunna bidra till lärares kompetensutveckling som Buffington och Silvernail (2009) menar är viktigt för att framgångsrikt använda datorn i undervisningen.

Referenser

Ahlberg, A. (2009). Kunskapsbildning i specialpedagogik. I A. Ahlberg (Red.), *Specialpedagogisk forskning En mångfasetterad utmaning* (s. 9-28). Lund: Studentlitteratur.

Ahlberg, A. (2001). *Lärande och delaktighet.* Lund: Studentlitteratur

Ahlström, R., Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L., Holmqvist, M., Rystedt, E. & Wallby, K. (1996). Problemlösning. I R. Ahlström, B. Berius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson, M. Holmqvist, E. Rystedt & K. Wallby (Red.), *Matematik – ett kommunikationsämne.* Nämnaren Tema. (s. 69-84). Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Alvesson, M. & Sköldberg, K. (2008). *Tolkning och reflektion – vetenskapsfilosofi och kvalitativ metod.* Studentlitteratur.

Bentley, P-O. (2011). *Det beror på hur man räknar – matematikdidaktik för grundlärare.* Stockholm: Liber.

Björck-Åkesson, E. (2007). Specialpedagogik – Ett kunskapsområde med många dimensioner. I C. Nilholm & E. Björk-Åkesson (Red.), *Reflektioner kring specialpedagogik – sex professorer om forskningsområdet och forskningsfronterna* (s. 85-99). (Vetenskapsrådets rapportserie 5:2007). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 115-132). Studentlitteratur.

Blomhöj, M. (2001). Villkor för lärande i en datorbaserad matematikundervisning – elevernas användning av avancerade matematikprogram. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 185-218). Studentlitteratur.

Booth, T. (1998). The poverty of special education: theories to the rescue? I C.Clark, A. Dyson & A. Millward (Red.), *Theorising special education* (s.7-20). London and New York: Routledge.

Buffington, P. J., & Silvernai, D.L. (2009). *Improving Mathematics Performance Using Laptop Technology: The Importance of Professional Development for Success* (Research brief). Maine Education Policy Research Institute in collaboration with the Maine International Center for Digital Learning University of Southern Maine.

M. Clarke, D., Roche, A. & Mitchell, A. (2011). Tio sätt att göra bråk levande I Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. & Ryding, R (Red.), *Matematik-ett grundämne* (s. 113-120). Göteborg: Nationellt centrum för matematik. Göteborgs universitet.

Denscombe, M. (2009). *Forskningshandboken – för småskaliga forskningsprojekt innom samhällsvetenskaperna.* Studentlitteratur.

Egerbladh, T. & Tiller, T. (1998). *Forskning i skolans vardag.* Lund: Studentlitteratur.

Ernest, P. (2011). *Mathematics and Special Educational Needs Theories of mathematical ability and effective types of intervention with low and high attainers in mathematics.* Saarbrucken: Lambert Academic Publishing.

Europaparlamentet (2006). *Europaparlamentets och rådets rekommendationer den 18 december 2006 om nyckelkompetenser för livslångt lärande.* 2006/962/EG.

Fischbein, S. (2007). Specialpedagogik i ett historiskt perspektiv. I C. Nilholm & E. Björk-Åkesson (Red.), *Reflektioner kring specialpedagogik – sex professorer om forskningsområdet och forskningsfronterna* (s. 17-35). (Vetenskapsrådets rapportserie 5:2007). Stockholm: Vetenskapsrådet.

GeoGebra. www.geogebra.org

Gersten, R. & Clarke, S.B. (2007a). *Effective Strategies for Teaching Students with Difficulties in Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.

Gersten, R. & S. Clarke, S.B. (2007b). *What Are the Characteristics of Students with Learning Difficulties in Mathematics?* National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.

Gustafsson, I-M, Jakobsson, M, Nilsson, I, Zippert, M, m.fl. (2011). Matematiska uttrycksformer och representationer. *Nämnaren*, 3(38), 36-45.

Göransson, K. & Nilholm, C. (2009). Om smygrepresentativitet i pedagogiska avhandlingar. *Pedagogisk forskning i Sverige, 14*(2), 136–142.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation.* Stockholm: Liber.

Hartman, J. (2004). *Vetenskapligt tänkande Från kunskapsteori till metodteori.* Studentlitteratur.

Haug, P. (1998). *Pedagogiskt dilemma. Specialundervisningen*. Skolverket. Stockholm: Liber.

Holme M, I. & Solvang K, B. (1997). *Forskningsmetodik Om kvalitativa och kvantitativa metoder.* Studentlitteratur.

Kroksmark, T. (2011). *Lärandets stretchadhet Lärandets digitala mysterium i En-till-En-miljöer i skolan.* Didaktisk tidskrift, Vol 20, No 1, 2011, 1-22, Jönköping University Press.

Lester, F. (1996). Problemlösningens natur. I R. Ahlström, B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson, M. Holmqvist, E. Rystedt & K. Wallby (Red.), *Matematik – ett kommunikationsämne.* Nämnaren Tema. (s. 85-91). Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Liberg, C. (2007). Språk och kommunikation. I Myndigheten för skolutveckling. (Red.), *Att läsa och skriva – forskning och beprövad erfarenhet.* (s. 7-23). Stockholm: Liber.

Lingefjärd, T. (2011). Tekniska hjälpmedel i matematikundervisningen. I G. Brandell & A. Pettersson (Red.), *Matematikundervisning Vetenskapliga perspektiv* (s. 187-208). Lund: Studentlitteratur.

Lingefjärd, T. (2009). GeoGebra för de yngre. *Nämnaren*, 1(36), 38-41.

Lingefjärd, T. (2008). Samspelet mellan algebra och geometri. *Nämnaren*, 4(35), 28-31.

Lingefjärd, T. & Holmqvist, M. (2001). Datorns roll i utbildningen av matematiklärare. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 295-314). Studentlitteratur.

Lundberg, I. & Sterner, G. (2009). *Dyskalkyli – finns det? Aktuell forskning om svårigheter att förstå och använda tal.* NCM, Göteborgs universitet.

Lunde, O. (2003). *Matematikkvansker som spesialpedagogisk tema.* Nordisk tidsskrift for spesialpedagogikk, nr. 3/2003, s. 245-260.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik. Matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle.* Studentlitteratur.

Magne, O. (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan*. Lund: Studentlitteratur.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla. Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter.* Studentlitteratur

McIntosh, A. (2009). *Förstå och använda tal – en handbok.* NCM, Göteborgs universitet.

Merriam, S. B. (1994). *Fallstudien som forskningsmetod.* Lund: Studentlitteratur.

Mouwitz, L., Emanuelsson, G. & Johansson, B. (2003). Vad menas med baskunnande i matematik? I Myndigheten för skolutveckling (Red.), *Baskunnande i matematik*. Stockholm: Fritzes förlag.

Myndigheten för skolutveckling (2007). *Matematik – en samtalsguide.*

Nilholm, C. (2006). *Inkludering av elever: vad betyder det och vad vet vi?* Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Nunes, T., Bryant, P., Hurry, J. & Pretzlik, U. (2006). *Fractions: difficult but crucial in mathematics learning.* Teaching and Learning Research Programme, Oxford University Department of Education.

Nämnaren Tema. (1996). Problemlösning. I G. Olsson, G. Emanuelsson & B. Johansson (Red.), *Matematik – ett kommunikationsämneämne.* Nämnaren Tema. (s. 69-84). Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Nämnaren Tema. (1995). Undersökande aktiviteter. I G. Olsson, G. Emanuelsson & B. Persson (Red.), *Matematik – ett kärnämne.* Nämnaren Tema. (s. 65-76). Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Ollerton, M. & Watson, A. (2001). *Inklusive Mathematics 11-18.* Continuum: London and New York

Persson, B. (2008). *Elevers olikheter och specialpedagogisk kunskap.* Stockholm: Liber.

Riesbeck, E. (2011). Lärande i matematik genom redskap. I B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson & R. Ryding (Red.), *Matematik – ett grundämne.* Nämnaren Tema 8. (s. 295-303). Göteborg: NCM.

Screencast-O-Matic. www.screencast-o-matic.com

Sherman, J.H., Richardson, I.L. & Yard, G. (2009). *Teaching children who struggle with mathematics: Systematic Intervention and Remediation.* Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Merrill.

Skolverket (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, Lgr 11.*

Skolverket (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik.*

Skolverket (2011c). *Bedömarträning i matematik årskurs 6 – Bråk/del av.*

Skolverket (2011d). Lesson study och learning study samt IKT i matematikundervisningen En utvärdering av matematikundervisningen. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2004). *Nationella utvärderingen av grundskola 2003. Sammanfattande huvudrapport.* Rapport 250.

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (2010). *Lärande och kulturella redskap. Om lärprocesser och det kollektiva minnet.* Stockholm*:* Norstedt.

Säljö, R. (2005). *Lärande och kulturella redskap. Om lärprocesser och det kollektiva minnet.* Stockholm: Norstedts akademiska förlag..

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: Ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm: Prisma.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk – samhällsvetenskaplig forskning.* Hämtat 3 januari 2012, från http://www.vr.se/download/18.7f7bb63a11eb5b697f3800012802/forskningsetiska_principer_tf_2002.pdf.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard UP.

Wistedt, I. (1996). Matematiska samtal. I R. Ahlström, B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson, M. Holmqvist, E. Rystedt & K. Wallby (Red.), *Matematik – ett kommunikationsämne.* Nämnaren Tema. (s. 65-68). Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Åsberg, R. (2001). Det finns inga kvalitativa metoder – och inga kvantitativa heller för den delen. Det kvalitativa – kvantitativa argumentets missvisande retorik. *Pedagogisk forskning i Sverige*, 4, 272-273.

Åsberg, R. (2000). *Ontologi, epistemologi och metodologi. En kritisk genomgång av vissa grundläggande vetenskapsteoretiska begrepp och ansatser*. Göteborg: Göteborgs universitet, institutionen för pedagogik och didaktik. IPD – rapport nr 13, 2000.

Bilaga 1

Rektor 2011-11-16
Skola

Hej!

Vi heter Eva-Lena Cederman och Marie Utterberg och studerar sista året på speciallärarprogrammet och specialpedagogprogrammet. Som avslutning på utbildningen skriver vi en magisteruppsats om elever i behov av särskilt stöd i matematik, där vi kommer att undersöka dessa elevers kunskapsutveckling inom ett område i matematikämnet. Vårt syfte är att se om eleverna utvecklar sina matematikkunskaper genom att använda datorprogrammet GeoGebra. Programmet möjliggör ett undersökande arbetssätt vilket utnyttjas bäst inom området algebra och geometri. Vår handledare
är docent Thomas Lingefjärd, matematikdidaktiker vid Göteborgs universitet.

Vår tanke är att elevernas arbete med datorerna kommer att vara en del i den ordinarie undervisningen. Arbetsområdet och elevuppgifterna planeras i samråd med lärarna för att passa in i den ordinarie undervisningen. Hela klassen kommer att arbeta med datorn, men vårt intresse är de elever som har matematiksvårigheter. Matematiklärarna handleds under studien och vi presenterar självklart resultatet när analysen är gjord, för berörd personal.

Planerad arbetsgång:

- Vi introducerar datorprogrammet och elevuppgifterna för matematiklärarna.
- Ett förtest görs i klassen för att se elevernas matematikkunskaper inom det valda området.
- Utifrån förtestet väljs elever ut vars matematikutveckling vi speciellt vill följa. Med dessa elever genomförs intervjuer.
- Alla elever i klassen får arbeta med programmet en stund varje lektion under ett par veckor. Detta ska ses som komplement till den ordinarie undervisningen.

- Efter att arbetsområdet avslutats genomförs ett eftertest och de utvalda eleverna intervjuas.
- Berörd personal intervjuas innan och efter studien.

Vi hoppas att vi kan ge ett bidrag till lärarnas kompetensutveckling om hur datorn kan användas som ett verktyg i matematikundervisningen. Ett annat mål är att öka förståelsen för dessa elevers svårigheter och därmed på sikt öka måluppfyllelsen.

Vänliga hälsningar

Eva-Lena Cederman
Marie Utterberg

Bilaga 2

Kommun X 2012-02-01

Vi är två studenter vid Göteborgs Universitet som läser sista terminen på speciallärarprogrammet och specialpedagogiska programmet. Vi ska nu påbörja vårt examensarbete som ska vara klart i maj 2012. Syftet med examensarbetet är att undersöka hur elever samtalar när de använder datorn som verktyg. Vi är intresserade av om datorn och programmet GeoGebra möjliggör ett undersökande arbetssätt för eleverna, vilket skulle kunna bidra till en ökad förståelse och begreppsuppfattning. Vårt fokus kommer att vara på de elever som behöver utveckla sina kunskaper kring bråktal men vi är också intresserade av alla elevers lösningsstrategier. Vi kommer att utgå från följande frågor:

- Hur beskriver och förstår elever begreppet ”del av”?
- Hur påverkas elevers begreppsuppfattning när GeoGebra används vid problemlösning?

För att kunna genomföra denna studie och svara på ovanstående frågor behöver vi se och höra hur elever går till väga när de löser matematikuppgifter. Studien kommer att genomföras i två steg. Först görs en diagnos och sedan väljs ca 10 elever ut med varierande förkunskaper. Eleverna kommer i par att arbeta med matematikuppgifter vid två tillfällen. Deras samtal och det som sker på datorskärmen spelas in med hjälp av datorprogrammet ScreenCast-Ó-Matic. Eventuellt görs en uppföljande intervju för att få ytterligare information om hur eleverna tänker kring matematikuppgifterna. Undersökningen kommer att utföras i mars och sker vid två lektionstillfällen.

Eleverna liksom skolan kommer att vara anonyma i uppsatsen och därmed kommer de inte att kunna identifieras. Deltagandet är frivilligt och kan när som helst avbrytas. Inspelade samtal sparas på USB-minne som hanteras av oss. Dessa data kommer att raderas när examensarbetet är slutfört.

För att kunna genomföra undersökningen behöver vi vårdnadshavares medgivande.

☐ Mitt barn **får** delta i undersökningen.

☐ Mitt barn **får inte** delta i undersökningen.

Datum …......................

…...
Elevens namn

…..
Vårdnadshavares namn

Om du har ytterligare frågor kontakta oss gärna.
Med vänliga hälsningar

Marie Utterberg Eva-Lena Cederman

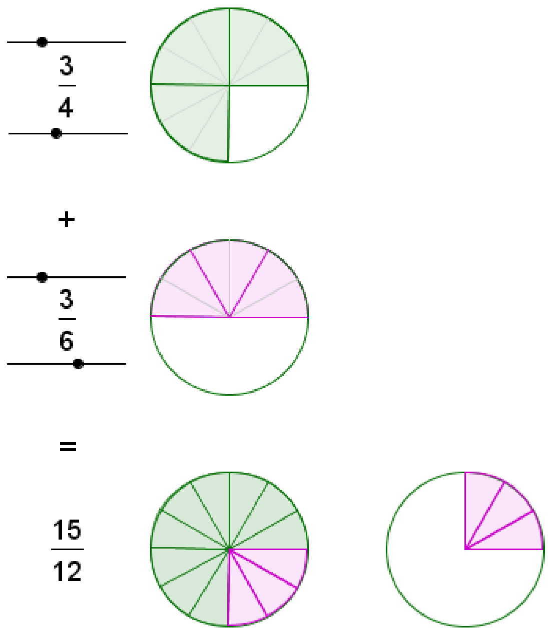
Handledare för undersökningen är: Thomas Lingefjärd, Göteborgs Universitet.

Bilaga 3

Förstudie 1

Uppgift A

- Klicka på punkterna och dra så att täljare och nämnare ändras.
- Visa med bilden att 1/3 + 2/3 = 3/3
- Filip tänkte så här: ½ + 1/3 = 2/5
  Hur tror ni att Filip har tänkt?
  Förklara varför svaret är orimligt.
  Visa hur ni kan komma fram till ett rimligt svar.
- Ge exempel på bråk vars summa är 4/5.

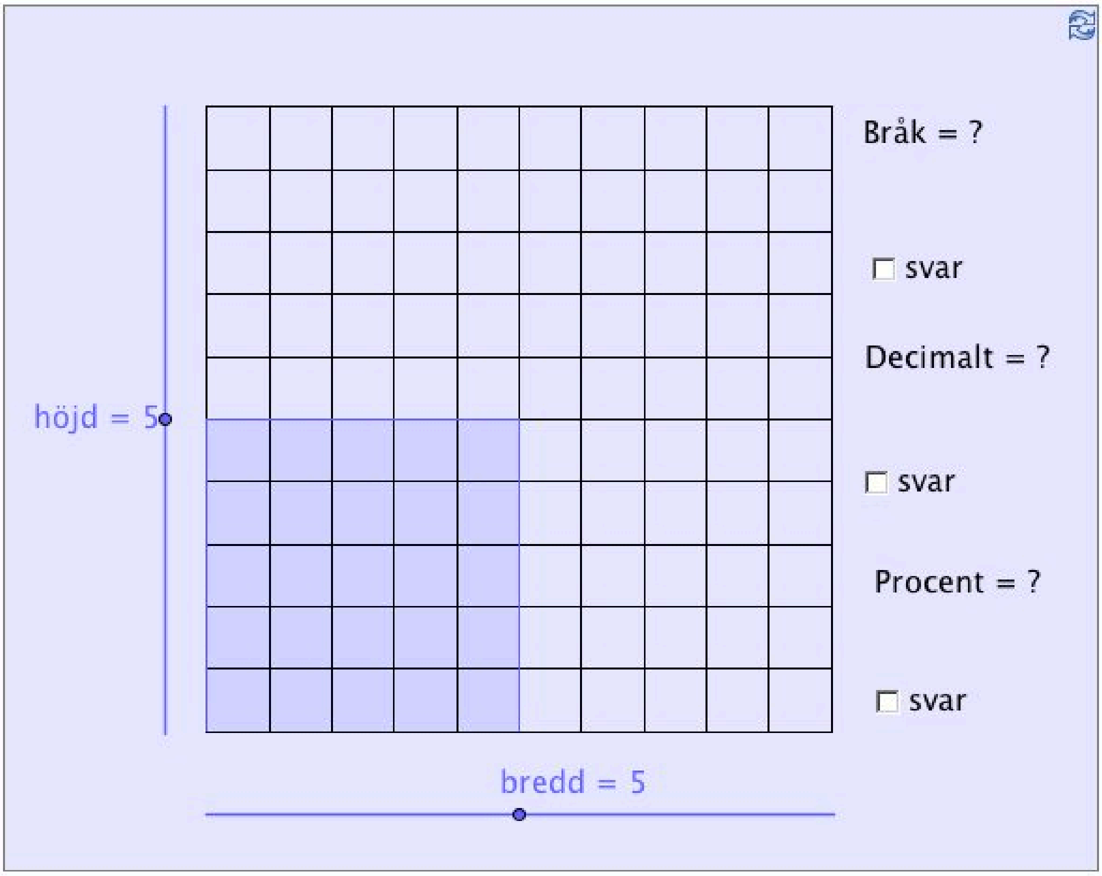


$$\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{3\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{9}{12}+\frac{6}{12}=\frac{15:3}{12:3}=\frac{5}{4}$$

Förstudie 1

Uppgift B

- Klicka på en av de två punkterna och dra för att ändra höjd respektive bredd.
- Sätt höjden till 4 och bredden till 10.
- På vilka olika sätt kan ni tala om hur stor del av kvadraten som är färgad?
- Visa i bilden att 0,20 = 1/5 = 20%
- Ge exempel på några samband mellan bråk, decimaltal och procent.



Bråkform, Decimalform, Procentform - GeoGebra

Använd datorn som hjälp när ni löser uppgifterna!

Bilaga 4

Förstudie 2 och förstudie 4

Uppgift A ***Använd datorn som hjälp när ni löser uppgifterna!***

1. Klicka på punkterna och dra så att täljare och nämnare ändras.

   Visa med bilden att $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}$

2. Är talet $\frac{5}{8}$ större eller mindre än $\frac{7}{8}$?

   Varför?

3. Är talet $\frac{4}{5}$ större eller mindre än $\frac{4}{6}$?

Varför?

4. Skriv bråket $\frac{3}{4}$ på **flera** olika sätt.

5. Magnus tänkte så här: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Hur tror ni att Magnus tänkt? Förklara varför svaret är orimligt.

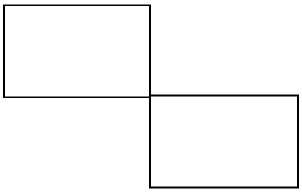
6. Ge **flera** exempel på bråk vars summa är $\frac{6}{7}$

7. Tyckte ni att datorn hjälpte er när ni skulle lösa uppgifterna? Varför?

Bilaga 5

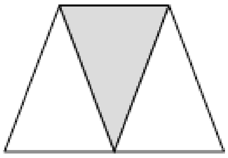
Matematikdiagnos

1. Skugga en fjärdedel av denna figur.

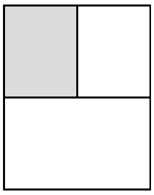


2. Ringa in alla figurer där $\frac{1}{3}$ är skuggad.

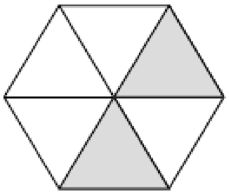
a)



b)



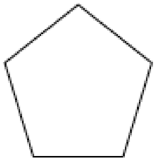
c)



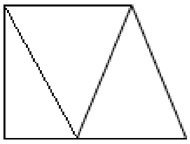
3. Skugga $\frac{1}{5}$ av följande figurer.

a)

b)



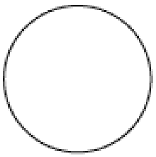
c)



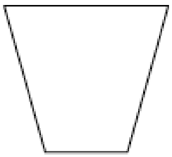
4. Skugga $\frac{2}{3}$ av följande figurer.

a)

b)

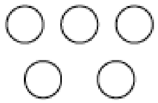


c)

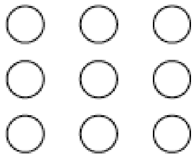


5. Skugga

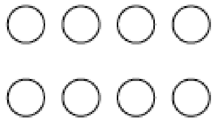
a) $\frac{3}{5}$ av cirklarna



b) $\frac{1}{3}$ av cirklarna



c) $\frac{3}{4}$ av cirklarna



6. Hur mycket är

a) en femtedel av 10? ______________

b) en fjärdedel av 8?____________

c) två femtedelar av 10?_____________

d) tre fjärdedelar av 8?____________

7. En pizza är delad i 6 bitar. Anders åt upp en tredjedel av pizzan.
Hur många bitar åt Anders?

Svar: _________ bitar.

8. I en skål låg det 12 karameller. Först åt Ola upp en tredjedel av karamellerna.
Sedan åt Malin upp hälften av de karameller som var kvar.
Hur många karameller låg det sedan i skålen?

Svar: __________ karameller.

9. Vilket av de två talen är störst?

a) a) $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{2}$ eller $\frac{2}{3}$

10. Jämför de båda talen i uppgifterna.
Ringa in de uppgifter där båda talen är lika stora.

a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{2}{4}$ d) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

11. Fyll i rätt siffror så att alla tal i raden blir lika stora.

a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{}{8} = \frac{}{12}$ b) $\frac{2}{5} = \frac{8}{}$

12. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -$ b) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = -$ c) $\frac{2}{4} + \frac{2}{8} = -$

13. I Anders trädgårdsland är det morötter på $\frac{1}{5}$ och gurkor på $\frac{4}{10}$ av landet.
Hur stor del av landet är kvar till sallad?

14. Du heter..

Bilaga 6

Elevuppgift 1 – förkunskaper som elever visar på diagnos

Del av antal

För att få kännedom om elevernas förkunskaper inom del av antal har uppgift 5 och 6 i diagnosen använts. I fråga 5 a, b, c fick eleverna skugga bollar som del av antal och i uppgift 6 a, b, c, d svarade eleverna på frågan hur mycket en del av ett antal är.

Eleverna i grupp A (1) svarade rätt på uppgift 5. Elev 2 svarade inte på uppgift 6 och Elev 1 svarade som följer:

Uppgift	Elev 1	Kommentar
6. Hur mycket är a) en femtedel av 10 b) en fjärdedel av 8 c) två femtedelar av 10 d) tre fjärdedelar av 8	 5 6 0 2	

Eleverna i grupp D (1) svarade båda rätt på uppgift 5a. Elev 1 svarade rätt på uppgift 5bc. Elev 2 svarade inte på uppgift 5bc och 6. Elev 1 svarade som följer:

Uppgift	Elev 1	Kommentar
6. Hur mycket är a) en femtedel av 10 b) en fjärdedel av 8 c) två femtedelar av 10 d) tre fjärdedelar av 8	 en halv en halv en hel en hel + 4	Här uppfattar vi det som om att eleven har tänkt att fem av tio är en halv och fyra av åtta är en halv. I uppgift c och d verkar det som att eleven har multiplicerat täljare med nämnare, till exempel 2*5=10 och jämför sedan detta med antalet.

I grupp E (2) har eleverna svarat rätt på uppgift 5 och korrekt svar på uppgift 6 b, c och d. På uppgift 6a har de svarat enligt följande:

Uppgift	Elev 1	Kommentar
6. Hur mycket är a) en femtedel av 10	1/2	
	Elev 2	
6. Hur mycket är a) en femtedel av 10	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	

Eleverna i grupp F (2) har svarat rätt på uppgift 5. Elev 1 har korrekt svar på uppgift 6 och elev 2 har svarat enligt följande:

Uppgift	Elev 2	Kommentar
6. Hur mycket är a) en femtedel av 10 b) en fjärdedel av 8 c) två femtedelar av 10 d) tre fjärdedelar av 8	 2/10 2/8 4/10 6/8	Vi uppfattar det som att eleven har viss kunskap om del av antal men vet inte hur svaret ska redovisas.

I grupp B (3), C (3) och G (3) svarade eleverna rätt på uppgift 5 och 6.

Bråk som proportion

För att få kännedom om elevernas förkunskaper inom proportionalitet har uppgift 11 i diagnosen använts. I fråga 11 a, b fick eleverna visa att tal i bråkform kan skrivas på flera olika sätt.

Elev 2 i grupp A (1) har inte svarat på denna uppgift. Elev 1 har svarat rätt på a-uppgiften och inte gett korrekt svar på b-uppgiften vilket visas nedan.

Uppgift	Elev 1	Kommentar
11. Fyll i rätt siffror så att alla tal i raden blir lika stora. b) $\frac{2}{5} = \frac{8}{\ }$	$\frac{2}{5} = \frac{8}{3}$	

Elev 1 i grupp D (1) svarade ej på uppgift 11. Elev 2 svarade korrekt på första delen i a-uppgiften och gav inga fler svar.

Uppgift	Elev 2	Kommentar
11. Fyll i rätt siffror så att alla tal i raden blir lika stora. a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{\ }{8} = \frac{\ }{12}$	$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{8} = \frac{\ }{12}$	

I grupp E (2) har eleven 2 gett korrekt svar på uppgift 11 och elev 1 gav rätt svar på uppgift a och svarade på uppgift b enligt följande:

Uppgift	Elev 1	Kommentar
11. Fyll i rätt siffror så att alla tal i raden blir lika stora. b) $\frac{2}{5} = \frac{8}{\ }$	$\frac{2}{5} = \frac{8}{11}$	

I grupp F (2) har den ena eleven gett korrekt svar på uppgift 11 och den andra eleven gav rätt svar på uppgift a och svarade ej på uppgift b.

I grupp B (3), C (3) och G (3) svarade eleverna rätt på uppgift 11.

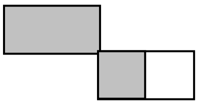
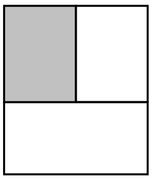
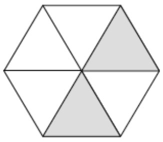
Bilaga 7

Elevuppgift 2 – förkunskaper som elever visar på diagnos

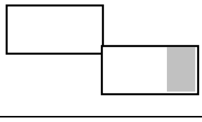
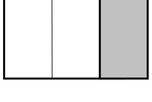
Del av en helhet

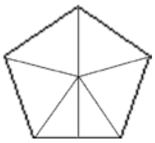
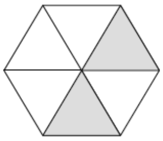
För att få kännedom om elevernas förkunskaper inom del av en helhet har uppgifterna 1-4 i diagnosen använts. I fråga 1, 3 och 4 fick eleverna skugga del av en helhet och i uppgift 3 fick de markera de figurer där 1/3 var skuggad.

Eleverna i grupp A (1) svarade rätt på uppgift 2a, 3a, 4ab. Elev 1 svarade rätt på 2b. Elev 2 svarade inte på uppgift 1, 3bc och 4c. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

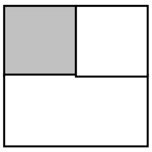
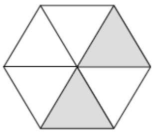
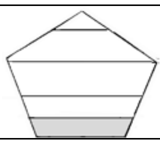
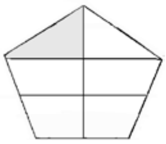
Uppgift	Svar elev 1	Kommentarer
1		Eleven skuggade tre fjärdedelar av denna figur istället för en fjärdedel.
	Svar elev 2	
2b		Den andra eleven ringade in denna figur för att visa en tredjedel.
	Svar från elev 1 och elev 2	
2c		Eleven ringade ej in denna figur där en tredjedel är skuggad.

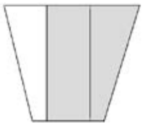
Eleverna i grupp D (1) svarade rätt på uppgift 2 ab och 3a och har ej svarat på 3c och 4 bc. Elev 1 har ej svarat på 3b. Elev 2 svarade rätt på uppgift 1. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 1	Kommentarer
1		Eleven skuggade mindre än en fjärdedel av denna figur.
4a		Eleven skuggar 1/3 i stället för 2/3.

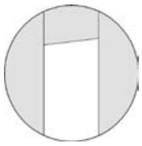
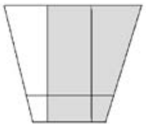
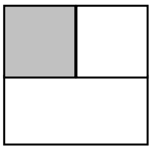
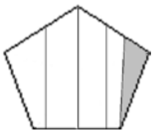
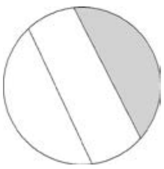
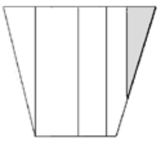
	Svar elev 2	
3b		Den andra eleven delar in figuren i olika stora sjättedelar och skuggar inget.
	Svar från elev 1 och elev 2	
2c		Eleven ringade ej in denna figur där en tredjedel är skuggad.
4a		Eleven skuggar 1/3 i stället för 2/3.

Eleverna i grupp E (2) svarade rätt på uppgift 1, 2a, 3ac och 4b. Elev 1 svarade rätt på uppgift 4a. Elev 2 svarade rätt på 2 bc. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

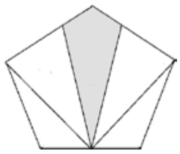
Uppgift	Svar elev 1	Kommentarer
2b		Eleven ringade in denna figur för att visa en tredjedel.
2c		Eleven ringade ej in denna figur där en tredjedel är skuggad.
3b		Eleven delar in figuren i olika stora femtedelar och skuggar en av dem.
	Svar elev 2	
3b		Den andra eleven delar in figuren i olika stora sjättedelar istället för femtedelar och skuggar en.
4a		Eleven skuggar 1/3 i stället för 2/3.

	Svar från elev 1 och elev 2	
4c		Eleverna skuggar 2/3 där delarna är olika stora.

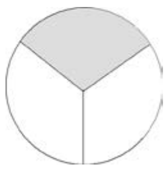
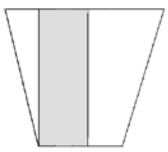
Eleverna i grupp F (2) svarade rätt på uppgift 1, 2ac, 3c och 4a. Elev 1 svarade rätt på 2b och har ej svarat på 3b. elev svarade rätt på 3a. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 1	Kommentarer
3a		Eleven skuggar 1/5 där delarna är olika stora.
4b		Eleven skuggar 2/3 där delarna är olika stora.
4c		Eleven skuggar 2/3 där delarna är olika stora.
	Svar elev 2	
2b		Eleven ringade in denna figur för att visa en tredjedel.
3b		Eleven delar in figuren i olika stora femtedelar och skuggar en av dem.
4b		Eleven skuggar 1/3 där delarna är olika stora.
4c		Eleven skuggar 1/5 där delarna är olika stora.

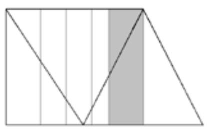
Eleverna i grupp G (3) svarade rätt på uppgift 1, 2abc, 3ac och 4abc. Elev 2 svarade rätt på 3b. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 1	Kommentarer
3b		Eleven delar in figuren i olika stora femtedelar och skuggar en av dem.

Eleverna i grupp C (3) svarade rätt på uppgift 1, 2abc och 3bc. Elev 1 svarade rätt på 4abc och elev 2 svarade rätt på 3a. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 1	Kommentarer
3a		Eleven skuggar 1/5 där delarna är olika stora.
	Svar elev 2	
4a		Eleven skuggar 1/3 i stället för 2/3.
4b		Eleven skuggar 1/3 i stället för 2/3.
4c		Eleven skuggar 1/3 i stället för 2/3.

Eleverna i grupp B (3) svarade rätt på uppgift 1, 2abc, 3a och 4 abc. Elev 1 har ej svarat på uppgift 3b. Elev 2 svarade rätt på 3b. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 2	Kommentarer
3c		Eleven delar in figuren sex olika stora delar, istället för 5 lika stora delar, och skuggar en av dem.

Storleksordna bråk

För att få kännedom om elevernas förkunskaper inom området storleksordna bråk har uppgift 9 och 10 i diagnosen använts. I fråga 9abc fick eleverna jämföra två bråktal och ringa in det största och i fråga 10abcd jämförde eleverna två bråktal och ringade in de som var lika stora.

Eleverna i grupp A (1) svarade rätt på uppgift 9abc. Elev 1 svarade rätt på 10a. Elev 2 svarade ej på uppgift 10. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 1	Kommentarer
10b	$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$	Eleven har ej ringat in detta bråkpar för att visa att de har samma värde.
10c	$\frac{2}{3}=\frac{2}{4}$	Eleven har ringat in detta bråkpar för att visa att de har samma värde.

Eleverna i grupp D (1) svarade rätt på uppgift 9c. Elev 1 svarade rätt på 9ab och svarade ej på uppgift 10. Elev 2 svarade rätt på uppgift 10. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 2	Kommentarer
9a	$\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{4}$	Eleven har ringat in $\frac{1}{7}$ för att visa att bråktalet är större än $\frac{1}{4}$.
9b	$\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{5}$	Eleven har ringat in $\frac{3}{5}$ för att visa att bråktalet är större än $\frac{3}{4}$.

Eleverna i grupp E (2) svarade rätt på uppgift 9 bc och 10. Elev 1 svarade rätt på 9a. Övriga uppgifter löstes på följande sätt:

Uppgift	Svar elev 2	Kommentarer
9a	$\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{4}$	Eleven har ringat in $\frac{1}{7}$ för att visa att bråktalet är större än $\frac{1}{4}$.

I grupp F (2), G (3), C (3) och B (3) svarade eleverna rätt på uppgifterna 9 och 10